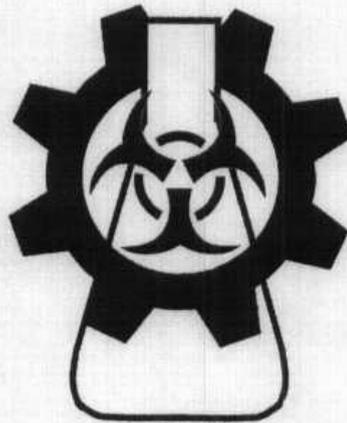


# Strömungsmechanik

(Kernfach)

## STM



*Klausurenausleihe Fachschaft CBI*

# B

# Strömungsmechanik I - Kernfach

## Prüfung (CIW/CIB)

Prof. Dr. Dr. h.c. F. Durst

Lehrstuhl für Strömungsmechanik

24. September 2004, 09:00 – 12:00 Uhr

FAU Erlangen-Nürnberg

### Aufgabe 1 (Physikalische Grundlagen):

In der Strömungsmechanik wird der Term  $\tau_{ij}$  gewöhnlich als molekularer Impulstransport beschrieben.

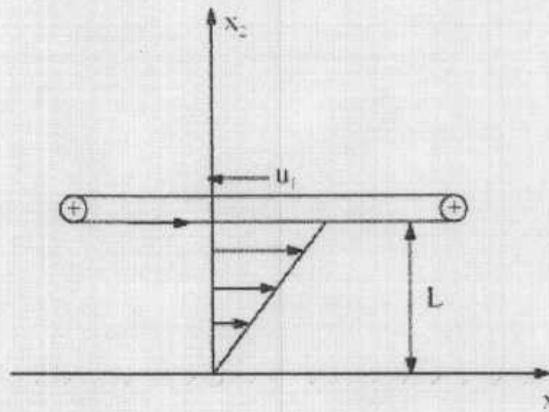


Abb. 1: Couette Strömung

- Geben sie den kompletten Term  $\tau_{ij}$  für ein Newtonsches Fluid an!
- Für eine ebene Couette Strömung (skizziert in Abbildung 1) existiert nur ein Term. Geben diesen Term mit den passenden Indizes für einen gegebenen Geschwindigkeitsgradienten in der Couette Strömung an.
- Erklären sie warum der molekulare Transportterm in einer Couette Strömung sich so verhält, dass beide Wände eine Kraft in  $x_1$  Richtung erfahren. Wie groß ist diese Kraft, wenn sie diese aus  $\tau_{ij}$  berechnen.
- Was ist physikalisch falsch bei der Erklärung, dass die resultierende Kraft aus der Schubspannung  $\tau_{ij}$  in einer Couette Strömung eine Reibungskraft ist?
- Die Viskosität eines Fluids ist in der Regel abhängig von der Temperatur. Wie verhält sich die Viskosität mit zunehmender Temperatur für Gase und Flüssigkeiten? Erklären sie das Verhalten!

### Aufgabe 2: (Strömungskinematik)

Bei der Betrachtung von Strömungsvorgängen in Fluiden sind zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen möglich, die Lagrangesche und die Eulersche Betrachtungsform. Jede dieser Betrachtungsweisen haben, was ihre mathematische Formulierung bzw. Anschaulichkeit an-

geht, ihre eigenen Vorteile. Deshalb stehen die beiden Methoden gleichberechtigt nebeneinander. Unabhängig von der Fragestellung kann auf die eine oder andere Betrachtungsweise zurückgegriffen werden.

- Wie ist die Euler und Lagrangesche Betrachtung charakterisiert? Geben Sie das Geschwindigkeitsfeld in beiden Darstellungen an!
- Warum eignet sich die Lagrangesche Betrachtungsweise am besten, um die Grundgesetze der Strömungsmechanik abzuleiten, und warum ist die Eulersche Methode besser bei der Benutzung für Strömungsberechnungen?
- Aus den Grundbegriffen der beiden Betrachtungsweisen lassen sich sehr anschaulich Linien als Hilfsmittel zur Beschreibung der Strömung herleiten. Welche Linien sind dies und wie sind sie charakterisiert? Wann sind die Linien identisch?
- Welche zeitlichen Ableitungen sind konstant, wenn die Dichte eines Fluids konstant ist und wenn ein Strömungsfeld als stationär bezeichnet wird?
- Ein Geschwindigkeitsfeld ist gegeben mit:

$$\begin{aligned}u_1 &= x_1 + t \\u_2 &= -x_2 + t \\u_3 &= 0\end{aligned}$$

Wenn dieses Geschwindigkeitsfeld eine mögliche inkompressible Strömung beschreiben soll, muss es die Kontinuitätsgleichung erfüllen. Ist dies richtig? Begründen sie ihre Antwort!

### **Aufgabe 3 (Hydrostatik):**

Ein U-Rohr Manometer rotiert mit konstanter Geschwindigkeit um die Achse A-B, wie in Abbildung 2 ersichtlich. Die Winkelgeschwindigkeit ist Umdrehung pro Sekunde. Das Ende C des U-Rohrmanometers ist geschlossen.

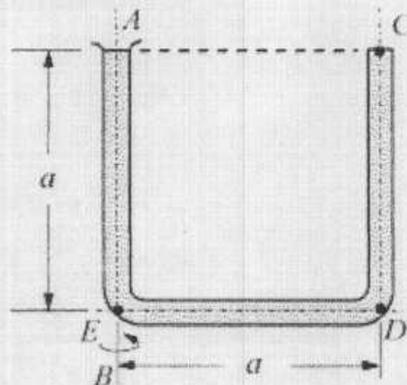


Abb. 2: Drehende U-Rohrmanometer

- Welche Annahmen werden getroffen wenn man die Grundgleichungen der Hydrostatik aus den Bewegungsgleichungen für ein Fluid herleitet?
- Wie groß ist der Druck am Punkt C?
- Welcher Druck ergibt sich an den Punkten D und E?
- Der Versuch mit dem rotierenden U-Rohrmanometer wird in einem Aufzug mit der Beschleunigung  $b$  durchgeführt. Wie ändert sich die Spiegelhöhe  $a$  in A und C wenn sich der Aufzug nach oben bewegt, d.h. entgegen der Erdbeschleunigung  $g$ .
- Diskutieren Sie, was bei dem Versuch passieren kann, wenn die Beschleunigung  $b$  des Fahrstuhls nach unten erfolgt! (Beachte, dass C geschlossen ist)

#### Aufgabe 4: (Integralform der Grundgleichung)

Die Abbildung 3 zeigt einen Wagen mit einem Behälter. In dem Behälter herrscht Überdruck. Am hinteren Ende des Behälters befindet sich eine Austrittsöffnung aus dem die Luft ausströmt und einen Schub produziert. Der Wagen gleitet auf Schienen mit einem Reibungsbeiwert  $c_f$ . Der Luftwiderstand des Wagens beträgt  $c_w$ . Das Gewicht des Wagens ist  $m$ . Zum Zeitpunkt  $t_0$  hat der Wagen die Geschwindigkeit  $U_1=0\text{m/s}$ . Der Druckverlust im Behälter ist während des Ausströmens zu vernachlässigen.

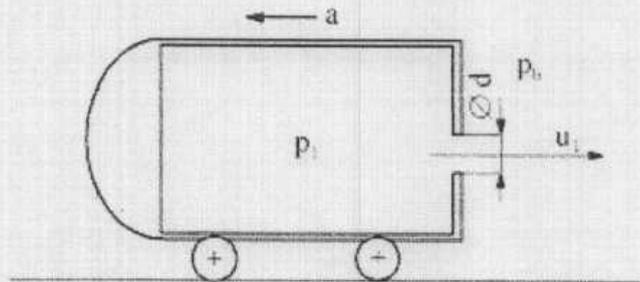


Abb. 3: Bewegtes Fahrzeug

- Geben sie die Integralformen der mechanischen Energiegleichung an. Erläutern Sie die einzelnen Terme. Ist die Gleichung unabhängig von der Impulsgleichung?
- Welche Kräfte wirken auf den Wagen?
- Welche Beschleunigung erfährt der Wagen zum Zeitpunkt  $t$ ?
- Bewegt sich der Wagen schneller, wenn die Austrittsöffnung verkleinert wird? Begründen sie ihre Antwort!
- Bei Erhöhung des Druckes  $p_1$  im Behälter erhöht sich die Geschwindigkeit am Austritt. Welche maximale Geschwindigkeit kann am Austritt erreicht werden. Welche baulichen Veränderungen müssen getroffen werden, um eine weitere Erhöhung zu erzielen?

### Aufgabe 5 (Potentialtheorie):

Die Abbildung 4 zeigt eine Potentialströmung in ein  $x$ - $y$  Koordinatensystem. Die Elemente sind eine Parallelströmung, eine Quelle  $Q_s$  im Punkt  $(0,0)$  und ein Potentialwirbel  $\Gamma_w$  im Ursprung  $(0,0)$

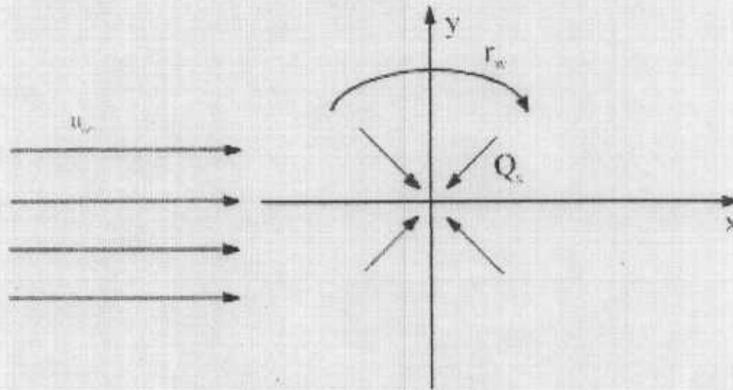


Abb. 4: Potentialströmung

- Unter welchen Annahmen und Vereinfachungen gilt die Potentialtheorie?
- Wie lautet das komplexe Potential der Strömung?
- Wie lautet die Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld?
- Hat diese Strömung Staupunkte, und wo liegen sie? Wie viele Staupunkte gibt es?
- Wie bestimmt man die Staustromlinie, und wie lautet sie?

### Aufgabe 6 (Dimensionsanalyse)

Die Abbildung 6 zeigt ein Messwehr mit rechteckiger Öffnung. Es soll der Volumenstrom bestimmt werden.

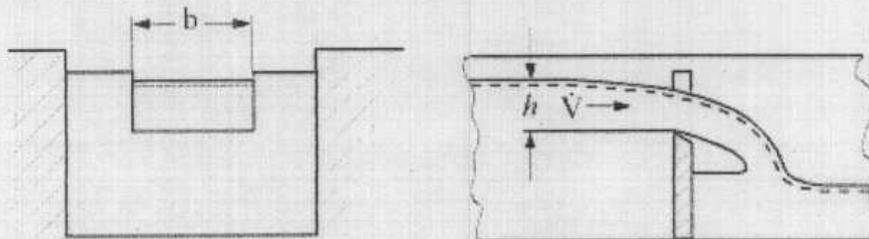


Abb. 6: Messwehr

- a) Bestimmen Sie die physikalischen, dimensionsbehafteten Größen, die bei dem Problem eingehen!
- b) Legen sie die geeigneten Basisdimensionen fest!
- c) Wie lautet die Dimensionsmatrix? Welchen Rang hat die Matrix?
- d) Welche Formel liefert die Dimensionsanalyse für den Volumenstrom?
- e) Was muss beachten werden, wenn das Messwehr in einen Modellmaßstab von 1:10 verkleinert wird!

### Aufgabe 7: (Gasdynamik)

In einer Brennkammer einer Rakete der Startmasse  $m_s$  herrschen Ruhedruck  $p_R$  und die Ruhetemperatur  $T_R$ . Der Massendurchsatz durch das Triebwerk beträgt  $\dot{m}$ . Entwerfen Sie eine kreisrunde Lavaldüse, die der Rakete beim senkrechten Start vom Erdboden die Anfangsgeschwindigkeit  $U$  erteilt. (Beachte, die Beschleunigung  $b$  ist gegeben)

Gegeben:

$$m_s = 100.9 \text{ kg} \quad R = 287 \text{ J / kgK}$$

$$\dot{m} = 4 \text{ kg / s} \quad \kappa = 1.4$$

$$p_R = 50 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad p_b = 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_R = 1633 \text{ K} \quad b = 49.05 \text{ m / s}^2$$

- a) Wie groß ist der Durchmesser  $D$  am engsten Querschnitt in der Lavaldüse?
- b) Wie groß ist der Durchmesser  $D_1$  der Düse am Austritt?
- c) Welche Größe hat die Machzahl  $M$  am Austrittsquerschnitt?
- d) Wie groß ist der Druck  $p_1$  am Austrittsquerschnitt?
- e) Was ist die Temperatur des Gases am Austritt?

24.09.2004

A4. a)

b).  $F_w$ : Widerstandskraft.  $F_B$ : Beschleunigungskraft. $F_R$ : Rollwiderstand.  $F_A$ : Antriebskraft. $G$ : Gewichtskraft

$$F_w = C_w \cdot \frac{\rho}{2} u^2 A.$$

$$F_R = C_f \cdot mg,$$

$$\vec{I} = \rho u_0^2 A_0$$

c)  $F_B = ma = -C_f mg - \frac{\rho}{2} u^2 A \cdot C_w + \frac{\eta}{2} d_i^2 (P_i - P_0)$

d).  $I_1 = \rho u_0^2 A_0$   $A_0 \downarrow \rightarrow I_1 \downarrow \rightarrow ma \uparrow$

e).

A5) a). ① zweidimensionale Strömung

② Reibungsfrei.

③ Rotationsfreiheit.

b).  $F(z) = U_\infty \cdot z + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z - \frac{Q}{2\pi} \ln z.$

c).  $W(z) = \frac{dF(z)}{dz}$

$$W(z) = U_\infty + i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} - \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z}$$

d) (Staupunkte.  $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}$ )  
$$W(z) = U_\infty + i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{x+iy} - \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{x+iy}$$

$$W(z) = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{i(x+iy)}{x^2+y^2} - \frac{Q}{2\pi} \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\therefore W(z) = u_1 - i u_2$$

$$\Rightarrow u_1 = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$u_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \square \\ \square \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}$$

Ab) a)  $\dot{V}$ ,  $b$ ,  $R$ ,  $p$ ,  $v$ ,  $g$ .

b)	$\dot{V}$	$b$	$R$	$p$	$g$	$v$
M	0	0	0	1	0	1
L	3	1	1	-3	1	-1
T	-1	0	0	0	-2	-1

$6-3=3$  Kennzahlen

c)  $3 \times 6$  Matrix die hat Rang 3.

d)  $\dot{V} = [R]^\alpha [b]^\beta [p]^\gamma [g]^\delta [u]^\epsilon$   
 $\Rightarrow m^3 s^{-1} = m^\alpha m^\beta \text{kg}^\gamma m^{-3\gamma} m^\delta s^{-2\delta} \text{kg}^\epsilon s^{-\epsilon} m^{-\epsilon}$

$m: 3 = (\alpha + \beta - 3\gamma + \delta - \epsilon)$

$s: -1 = -2\delta - \epsilon$

$\text{kg}: 0 = \gamma + \epsilon \quad \dot{V} \sim b \quad \gamma = -\epsilon = 0$

$\rightarrow \delta = 0,5, \beta = 1, \alpha = 1,5$

$\Rightarrow \dot{V} = k \cdot b \sqrt{g} \cdot \sqrt{R^3}$

71.  $\dot{m} = p^* \cdot u^* \cdot A^*$

$\Rightarrow A^* = \frac{\dot{m}}{p^* u^*}$

$\Rightarrow A^* = \frac{\dot{m}}{p^* u^*} = \frac{4 \text{ kg/s}}{4,28 \text{ kg} \cdot 739,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,264 \times 10^{-3} \text{ m}^2$

$\frac{p^*}{p_R} = \left(\frac{p^*}{p_R}\right)^{1/\kappa} = \left[\frac{2}{\kappa+1}\right]^{1/\kappa} = 0,6339$

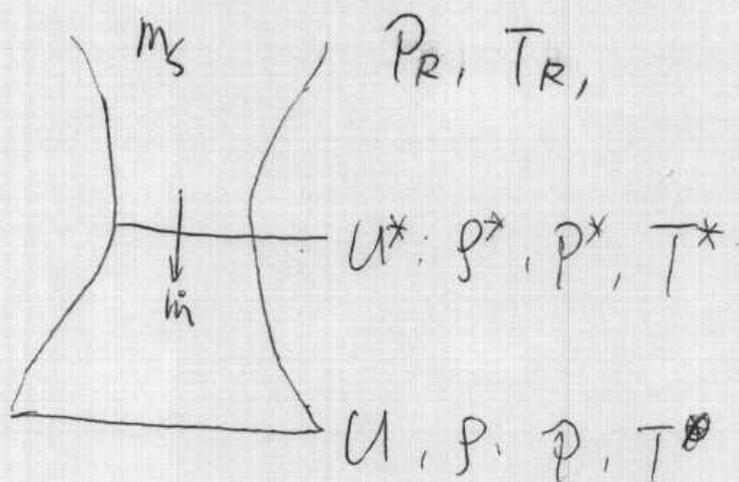
$\frac{p^*}{p_R} = \frac{p_R}{R T_R} = \frac{50 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}^2} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}^{\kappa}}{287 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \text{K}} = 17,42 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^3$

$p^* = 6,76 \times 0,6339 = 4,28 \text{ kg/m}^3$

$u^* = \sqrt{\kappa R T^*} = 739,2 \text{ m/s}$

$\frac{T^*}{T_R} = 0,833 \quad T_R = 1633 \text{ K} \quad T^* = 1360 \text{ K}$

$A^* = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{4A^*}{\pi}} = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ mm}$



$$\frac{P_b}{P_R} = \frac{10^5}{50 \cdot 10^5} = 0.02$$

$$\frac{U_1}{U_{max}} = 0.82 \Rightarrow U_1 = 0.82 \cdot 739.2 \text{ m/s} = 606 \text{ m/s}$$

$$\frac{\rho}{\rho_{max}} = 0.740$$

$$\frac{P_R}{\rho_R} = R T_R \Rightarrow \rho_R = \frac{P_R}{R T_R} = \frac{50 \cdot 10^5}{287 \cdot 1633} = 10.668 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\frac{\rho}{\rho_R} = 0.06 \Rightarrow \rho = 0.06 \times 10.668 = 0.640 \text{ kg/m}^3$$

$$A = \frac{\dot{m}}{\rho_1 U_1} = \frac{4 \text{ kg/s}}{0.640 \text{ kg/m}^3 \cdot 606 \text{ m/s}} = 10.11 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A = \frac{\pi}{4} D_1^2 \Rightarrow D_1 = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0.11 \text{ m}$$

$$\frac{T}{T_R} = 0.72 \text{ K}$$

$$T = 529.092 \text{ K}$$

26.09.2004

A1. a)  $\tau_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$

b)  $\tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ,  $\tau_{21} = -\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$

c)  $F_1 = \frac{d\tau_{12}}{dx_1} = -\mu \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} = -\mu \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}$

d) ~~Reibungskraft ist in Richtung der Flurdetektoren.~~ § 52

e) ~~aus  $\tau_{ij}$ :  $\tau_{ij}$  ist die Richtung in Bewegungsrichtung von Teilchen~~  
 mit zunehmender Temperatur steigt die Viskosität eines Gases und sinkt sie einer Flüssigkeit ab.

A2. a) L-Betrachtung ist mit index "R" bezeichnet.  
 Euler- mit Teilergroß charakterisiert.

$U_j(x_i, t)$ ,  $(U)_R$

b) Bahlinie, Streichlinie, ~~Stromlinie~~

Wenn eine Strömung stationär ist, sind B. u. Streichlinien identisch.

d)  $\frac{\partial f(x_i, t)}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial u_i(x_i, t)}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial T(x_i, t)}{\partial t} = 0$ , ...

e)  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(x_1 t)}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_2 t)}{\partial x_2} + \frac{\partial(x_3 t)}{\partial x_3} = 0$  ✓

A3) a)  $\frac{\partial f(x_i, t)}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial u_i(x_i, t)}{\partial t} = 0$

b)  $w = 0$ ,  $P_c = P_0$   
 $w \neq 0$ ,  $P_c = P_0 + \frac{\rho}{2} w^2 r^2$

c)  $P_B = P_0 + \frac{\rho}{2} w^2 r^2 + \rho g b$   
 $P_E = P_0 + \rho g b$

d. ändert sich nicht

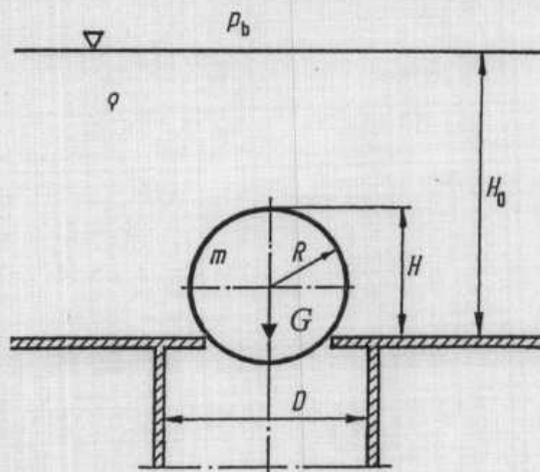
e. " " " "

Exercise 1

Repetition Fluid Mechanics I

**Task 1:**

A circular hole in the ground is closed with the help of a sphere with radius  $R$  and weight  $G$  (see figure). Density  $\rho$  of water, radius  $R$ , the height of the water level  $H_0$ , the height of the spherical cap  $H$ , the mass  $m$  of the sphere and the radius of the cylindrical pipe  $D$  are given.

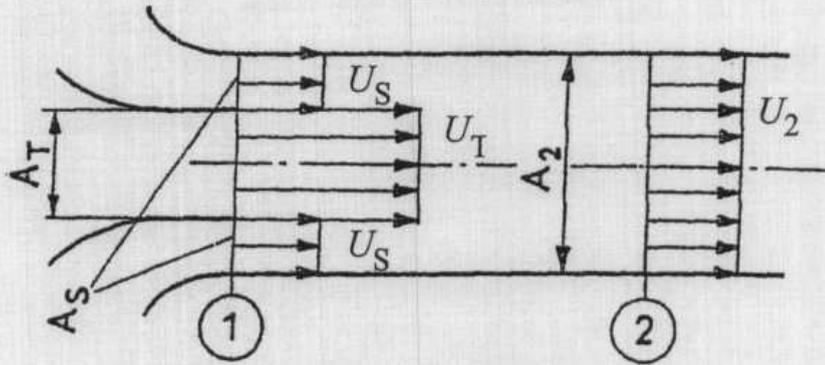


- What do you understand from Archimedes principle?
- Derive the general momentum equation for the hydrostatic and aerostatic cases.
- What is the force acting on the sphere in the above given figure?
- What should be the pressure in the cylindrical pipe, diameter  $D$ , to just open the valve (to lift the sphere)?
- Consider a case when  $H = H_0$ . What should be the ration  $H / R$  so that the edge at the closing of the valve is loaded only with the weight of the sphere?

**Task 2:**

In the mixing pipe of a jet pump, primary jet (cross-section area  $A_T$ , velocity  $U_T$ ) mixes with a secondary jet (cross-section area  $A_S$ , velocity  $U_S$ ). It can be assumed that a constant velocity  $U_2$  is achieved at the end of the mixing pipe. Both primary and secondary jets are of water and have the same temperature.

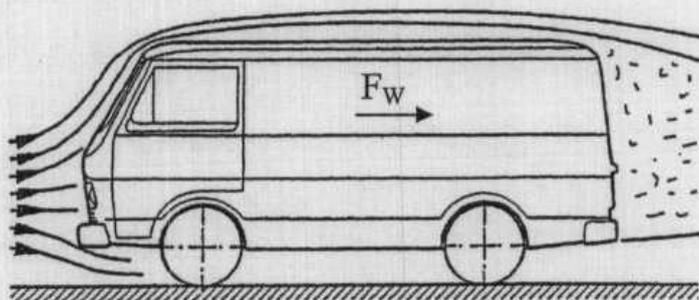
Velocity  $U_T$ ,  $U_S$  cross-section area  $A_S$ ,  $A_T$  and the density of water  $\rho$  are given.



- Derive from the differential form of the momentum equation the integral form!
- Under what conditions for a given control volume, will the pressure term in the Integral form of the momentum equation disappear?
- Calculate the pressure difference  $\Delta P = P_2 - P_1$ ! Solve the problem using the integral form of the momentum equation and the continuity equation!
- Determine from the energy balance the gain in the internal energy per unit mass resulting from the dissipation energy in mixing!
- Give examples of engineering procedures where mixing with jets is relevant!

### Task 3:

The dimensional analysis is employed with the aim of reducing the independent influencing parameter, so as to minimise the series of experiment as well as to have the possibility to carry out the flow measurements on scaled down models. The sketch below shows the flow around a car with resistant force  $F_W$  acting on it. The experiments are to be carried out in a wind canal with a geometrically similar model. The fluid can be considered as incompressible.

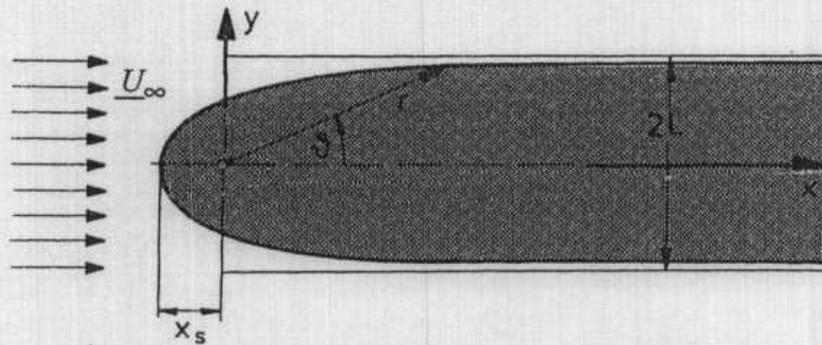


- What does one understand from the  $\Pi$  theorem?
- Determine the physical, dimensional parameters that define the problem and appropriate basis units to them!

- Write the dimensions matrix? What is the rank of the matrix?
- What are the dimensionless  $\Pi$  terms and what are the non-dimensional numbers which follow from them?
- What parameters and non-dimensional numbers have to be considered when the fluid is compressible?

**Task 4:**

The diagram below describes the flow around a flat infinitely long object ( $L, U_\infty$  real)



- Use the potential theory! What is the complex potential of the flow around the object? Why can the complex potential of the individual flows be added?
- How does one calculate the streamlines of the flow?
- Determine the coordinate  $x_s$  of the stagnation point?
- Calculate and sketch the velocity and pressure distribution on the x-axis ( $-\infty \leq x \leq x_s$ ), when the ambient pressure is  $p_\infty$ ! (Hint : Normalise physically correct the pressure and velocity!)
- At what distance from the stagnation point the velocity  $u$  on the x-axis changes by 1%?

**Task 5:**

From a boiler air is ejected through a Laval jet in the atmosphere. The nozzle profile is given by the function

$$r/l = 0.220 - 0.8494 \left( \frac{x}{l} \right)^{0.75} \exp \left( -3.75 \frac{x}{l} \right) \quad 0 \leq \frac{x}{l} \leq 1$$

where  $r$  is the nozzle radius,  $l$  is the nozzle length.

Also given are:

$$T_A = 17^\circ\text{C} \quad l = 0.05 \text{ m}$$

$$p_b = 10^5 \text{ Pa} \quad \kappa = 1.4$$

$$R = 287 \text{ J/kg K}$$

- a) What must be the boiler pressure  $p_K$  and the temperature  $T_K$ , if at the exit cross-section (index A) the jet temperature  $T_A$  and the pressure  $p_b$  has to be achieved?
- b) Calculate the  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $M$ ,  $M^*$  and the velocity  $u$  at the position where  $x/l = 0$ ; 0.2; 0.6 and 1.0!
- c) What is the mass flux  $\dot{m}$ ?
- d) How can with the same boiler pressure and nozzle profile the mass flow rate be increased? What values change at the exits cross-section?
- e) Which values change in the process when with the given  $T_A$  and  $p_b$ , fluid medium hydrogen is used?

- a) What must be the boiler pressure  $p_K$  and the temperature  $T_K$ , if at the exit cross-section (index A) the jet temperature  $T_A$  and the pressure  $p_b$  has to be achieved?
- b) Calculate the  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $M$ ,  $M^*$  and the velocity  $u$  at the position where  $x/l = 0$ ; 0.2; 0.6 and 1.0 !
- c) What is the mass flux  $\dot{m}$  ?
- d) How can with the same boiler pressure and nozzle profile the mass flow rate be increased? What values change at the exits cross-section?
- e) Which values change in the process when with the given  $T_A$  and  $p_b$ , fluid medium hydrogen is used?

## Strömungsmechanik Kernfach

### Prüfung

Prof. Dr. Dr.h.c. F. Durst  
Lehrstuhl für Strömungsmechanik  
FAU Erlangen-Nürnberg

29. September 2003, 08:30 – 11:30 Uhr

#### Aufgabe 1:

Die Strömungsmechanik bedient sich der Tensor-Notation, um Gleichungen abzuleiten. Erläutern Sie skalare Vektoren und Tensoren höherer Ordnung in dieser Schreibweise und beantworten Sie folgende Fragen:

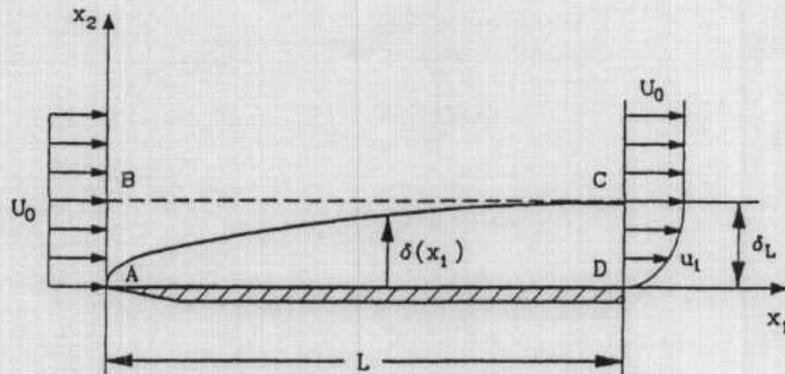
- ✓ Wenden Sie den Gradientenoperator auf einen Skalar und auf einen Tensor zweiter Ordnung an. Welche Tensoren entstehen durch diese Anwendungen des Gradientenoperators?
- ✓ Der Divergenzoperator soll auf einen Vektor (Tensor erster Ordnung) und auf einen Tensor dritter Ordnung angewandt werden. Tensoren welcher Ordnung entstehen somit?
- ✓ Wie lässt sich der Rotationsoperator in Tensorschreibweise darstellen, d.h. schreiben Sie  $\text{rot}(\vec{U})$  in Tensorschreibweise.
- ✓ Wenden Sie den <sup>DIVERGENZ</sup>Differenzenoperator auf den Rotationsoperator an. Was erhält man? Welche Ordnung hat der resultierende Tensor?
- ✓ Ein Tensor zweiter Ordnung umfasst neun Elemente. Was versteht man unter einem symmetrischen Tensor?

#### Aufgabe 2:

Es ist wichtig, dass man in der Strömungsmechanik die Grundgleichungen in Differenzialform angeben kann. Wichtig ist es auch, dass man die Bedeutung der einzelnen Terme versteht:

- ✓ Schreiben Sie die Kontinuitätsgleichung in Eulerschen Variablen an und erläutern Sie die einzelnen Terme.
- ✓ Schreiben Sie die Impulsgleichung in Tensorschreibweise und in Eulerschen Variablen an und erklären Sie die einzelnen Terme.
- ✓ Erläutern Sie die Begriffe „stationär“ und „konstant“ anhand der verschiedenen Zeitableitungen, die in der Strömungsmechanik genutzt werden.
- ✓  $\tau_{ij}$  ist der molekülbedingte Impulstransport. Er wird oftmals mit dem Hookschen Gesetz für elastische Medien verglichen. Ist dies physikalisch vertretbar?
- ✓ Molekular-theoretische Ähnlichkeitsbetrachtungen führen zur Einführung der Schmitt-Zahl, der Lewis-Zahl und der Prandtl-Zahl. Erläutern Sie diese Zahlen und geben Sie ihre Bedeutung an.

### Aufgabe 3:



Eine ebene Platte (Breite  $b$ , Länge  $L$ ) wird in Längsrichtung mit der konstanten Geschwindigkeit  $U_0$  angeströmt. Die Strömung ist inkompressibel und stationär. Infolge der ~~Reibung~~ an der Platte bildet sich eine Grenzschicht mit der Dicke  $\delta(x_1)$  aus. Außerhalb dieser Schicht ist die Geschwindigkeit  $u_1 = U_0 = \text{const}$ . Es wird angenommen, dass sich die Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht wie eine Sinusfunktion verhält und an der Wand null wird.

a) Gegeben ist  $\delta = \delta(x_1), \delta_L = \delta(x_1 = L), u_1 / U_0 = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{2}\pi x_2 / \delta\right) & \text{für } 0 \leq x_2 / \delta(x_1) \leq 1 \\ 1 & \text{für } x_2 / \delta(x_1) > 1 \end{cases}$

$\delta(x_1)$  nennt man üblicherweise die Grenzschichtdicke. Weshalb wächst diese mit der Distanz  $L$  an?

- b) Welcher Massenstrom tritt durch die Fläche  $BC$  des skizzierten Kontrollvolumens?
- c) Berechnen Sie den Massenstrom durch die Fläche  $BC$  mit Hilfe von  $u_2(x_1, x_2 = \delta)$
- d) Durch die integrale Impulsgleichung lässt sich die Kraft ausrechnen, mit der die ebene Platte in der obigen Skizze gehalten werden muss, damit sie mit der Strömung nicht mitgerissen wird. Wie groß ist diese Kraft?
- e) Wäre die Kraft größer, wenn die Strömungsgeschwindigkeitsverteilung, bei gleicher Anströmgeschwindigkeit zwischen Punkt  $D$  und Punkt  $C$  durch ein lineares Geschwindigkeitsprofil verbunden wäre?

### Aufgabe 4:

Ein Rührer soll in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit Einsatz finden. Der Rührprozess wird durch die Leistungsaufnahme  $P$ , den Rührerdurchmesser  $d$ , die Dichte  $\rho$ , die kinematische Viskosität  $\nu$  und die Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  des Rührers gekennzeichnet. Das Problem ist also durch fünf Parameter definiert. Die Leistung hängt somit von der geometrischen Abmessung  $d$ , den physikalischen Eigenschaften  $\rho$  und  $\nu$  und dem Prozessparameter  $n$  ab.

- a) Wie viele dimensionslose Kennzahlen hat das Problem?
- b) Bestimmen Sie die Dimensionsmatrix, und geben Sie die charakteristischen Kennzahlen an.

$P \quad d \quad \rho \quad \nu \quad \omega$  Parameter  $n$

- c) Eine der Kennzahlen, die oftmals herangezogen werden, ist die Newtonzahl, das andere die Reynoldszahl. Wie gehen diese aus der obigen Dimensionsanalyse hervor, und welche Bedeutung haben sie?
- d) Bringt man den Rührer in ein Gefäß ein mit dem Durchmesser  $D$ , so kommt eine weitere charakteristische Kennzahl dazu. Wie lautet diese?
- e) Was lässt sich durch die Auftragung von Messergebnissen eines Experiments in Form dimensionsloser Kennzahlen erreichen?

#### Aufgabe 5:

In einem Punkt ist eine Quelle mit der Ergiebigkeit  $\dot{q}$  lokalisiert und ein Wirbel mit der Wirbelstärke  $\gamma$ . Des Weiteren liegt eine Parallelströmung zur  $x$ -Achse vor.

- a) Nutzen Sie die Potentialtheorie, und geben Sie die Einzelbeiträge der Quelle, des Wirbels und der Parallelströmung als Komplexe Teilpotentiale an.
- b) Wie lautet das komplexe Potential der Gesamtströmung?
- c) Hat diese Strömung Staupunkte, und wo liegen sie? Erklären Sie, weshalb im errechneten Staupunkt die Geschwindigkeit 0 ist, d.h. wie heben sich die Komponenten der einzelnen Teilströmungsfelder auf?
- d) Wie lautet die Geschwindigkeit im Punkt  $x = 1$  und  $iy = -i$ ?
- e) Wie errechnet man die Stromlinien dieser Strömung?

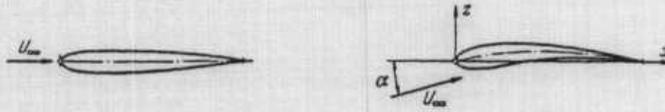
#### Aufgabe 6:

Ein wärmeisolierter Kessel mit dem Rauminhalt  $V=30 \text{ m}^3$  enthält Luft von  $p_{R1} = 10 \text{ bar}$  und  $T_{R1} = 290 \text{ K}$ . Durch eine Düse von  $0,1 \text{ m}$  Durchmesser strömt Luft in die Atmosphäre ( $p_u = 1 \text{ bar}$ ,  $T_u = 290 \text{ K}$ ).

- a) Bei welchem Kesseldruck  $p_R$  wird gerade noch Schallgeschwindigkeit erreicht?
- b) Berechnen Sie die Ausflussdauer  $\Delta t$ , bis zu der im Düsenquerschnitt gerade noch Schallgeschwindigkeit herrscht. Der Expansionsvorgang vollzieht sich isentrop.
- c) Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit in Luft und in Wasser?

#### Aufgabe 7:

Untenstehend ist ein Flugzeugflügel aufgetragen. Profile dieser Art werden auch bei Rührern eingesetzt, und es gilt dann die Kräfte auszurechnen, die von der Achse des Rührers aufzunehmen sind, d.h. das anscheinend aerodynamische Problem aus dem Bereich der Luftfahrttechnik ist auch für das Chemieingenieurwesen von Bedeutung.



- a) Der Auftriebsbeiwert  $c_a$  und der Widerstandsbeiwert  $c_w$  sind gegeben. Die Projektionsfläche  $A$  des Profils ist gleichfalls bekannt. Wie errechnen sich die Widerstandskraft und die Auftriebskraft des Profils?
- b) Links in der Zeichnung ist ein symmetrisches Profil aufgezeigt, rechts ein gewölbtes Profil. Wie hoch ist die Auftriebskraft des symmetrischen Profils?
- c) Das Verhältnis von Auftriebsbeiwert zu Widerstandsbeiwert nennt man die Gleitzahl eines Profils. Welche Werte treten für Gleitzahlen von Profilen auf, die auf Hochauftriebsprofile gelten?

**Prüfung in Strömungsmechanik I**  
**für**  
**Chemieingenieurwesen (CIW), Chemie- und Bioingenieurwesen (CBI),**  
**Maschinenbau (MB) sowie Computational Engineering (CE)**

17. März 2003

Studiengänge	Dauer der Klausur	zu lösende Aufgaben
CIW, CBI	3 Stunden	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
MB	2 Stunden	1, 3, 5, 6, 7
CE	1 Stunde	1, 3, 5

**Aufgabe 1:**

- a) Gegeben sind die folgenden Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder:

$$T(x_i, t) = a x_1 + b x_2^2 t + c x_3$$

$$U_j(x_i, t) \Rightarrow U_1 = (\alpha x_1 + \beta x_2) t^2$$

$$U_2 = \gamma x_2 t^2$$

$$U_3 = 0.$$

Dabei sind die Konstanten  $a, b, c, \alpha, \beta$  und  $\gamma$  so gebildet, dass die Dimensionen von  $T$  und  $U_j$  stimmen. Geben Sie folgende Ausdrücke in Tensorschreibweise an:

$$\text{grad } T, \text{div } \vec{U}, \text{rot } \vec{U}.$$

Notieren Sie zunächst die allgemeinen Ausdrücke und setzen Sie dann die obigen Felder ein.

- b) Geben Sie die zeitliche Änderung der substantiellen Temperatur als Ableitungen von Feldgrößen allgemein an. Berechnen Sie diese für das in Aufgabe a) gegebene Temperaturfeld  $T(x_i, t)$  unter Berücksichtigung des Geschwindigkeitsfeldes  $U_j(x_i, t)$ .
- c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Green die Zirkulation des Geschwindigkeitsfeldes

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

entlang des geschlossenen Randes

$$S = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 16 \text{ für } x_2 > 0 \\ x_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

- d) Schreiben Sie die Zustandsgleichung für ein ideales Gas und für eine ideale Flüssigkeit auf. Wie lautet die Gleichung für die Viskosität eines idealen Gases, d.h., drücken Sie die Viskosität als Funktion der molekularen Eigenschaften aus.

## Aufgabe 2:

- Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide her. Gehen Sie von der Massenerhaltung für ein Kontrollvolumen aus.
- Schreiben Sie die allgemeine Form der Impulsgleichung auf sowie die Vereinfachungen für inkompressible Strömungen. Erklären Sie die Bedeutung aller Terme in dieser Gleichung.
- Untersuchen Sie, ob es physikalisch möglich ist, dass ein inkompressibles Fluid das nachfolgende Geschwindigkeitsfeld besitzt:

$$U_1 = 5x_1 + 4x_2 + 5$$

$$U_2 = x_1 - 3x_2$$

$$U_3 = 2x_1^2 + 3x_3$$

Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie außerdem die Volumenänderung pro Zeit für ein Volumenelement dieses Fluids der Größe  $\delta V_{\mathcal{R}} = 1 \text{ mm}^3$ .

- Der Geschwindigkeitsgradiententensor  $\partial U_j / \partial x_i$  setzt sich zusammen aus dem Deformationstensor  $\epsilon_{ij}$  und dem Rotationstensor  $\Omega_{ij}$ . Notieren Sie die Aufspaltung des Geschwindigkeitsgradiententensors in diese beiden Anteile.
- Ein Haus wird aus einem großen Druckbehälter mit Wasser versorgt (siehe Abb. 1). Berechnen Sie die Ausflussgeschwindigkeiten in den drei Stockwerken und die Geschwindigkeit in der unterirdischen Zuleitung. Die drei Austrittsquerschnitte haben jeweils die Fläche  $A$ , das Zuleitungsrohr besitzt die Querschnittsfläche  $A'$ .

*Hinweis:* Betrachten Sie drei verschiedene Stromlinien, die alle im Querschnitt 1 (Wasseroberfläche des Druckbehälters) beginnen und jeweils im Stockwerk 1, 2 bzw. 3 enden. Benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung, um die Geschwindigkeit in der gemeinsamen Zuleitung zu berechnen. Die Größen  $p_i$ ,  $h$ ,  $a$ ,  $A$  and  $A'$  seien bekannt.

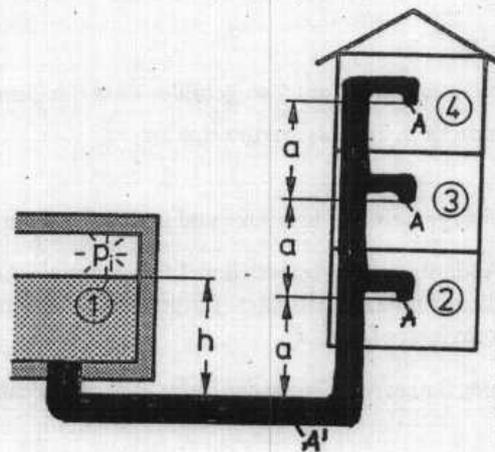


Abbildung 1: Wasserversorgungssystem eines mehrstöckigen Hauses

### Aufgabe 3:

- Leiten Sie den in Abb. 2 verdeutlichten linearen Verlauf des Schweredruckes in einer Flüssigkeit aus den Navier-Stokes-Gleichungen her, indem Sie die entsprechenden Vereinfachungen für die Hydrostatik vornehmen.
- Berechnen Sie die *Vertikalkraft*, die das umgebende Wasser auf den in Abb. 3 dargestellten Zylinder der Länge  $L$  ausübt.
- Berechnen Sie die *Horizontalkraft*, die das umgebende Wasser auf den in Abb. 3 dargestellten Zylinder der Länge  $L$  ausübt.

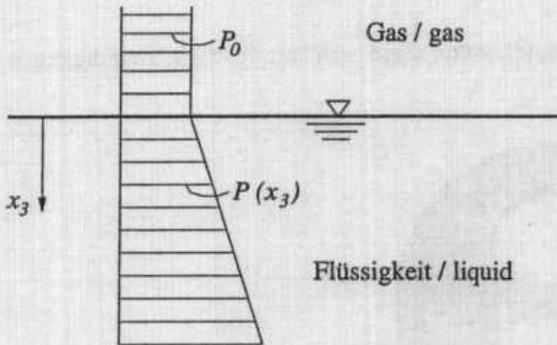


Abbildung 2: Linearer Druckverlauf in einer ruhenden Flüssigkeit

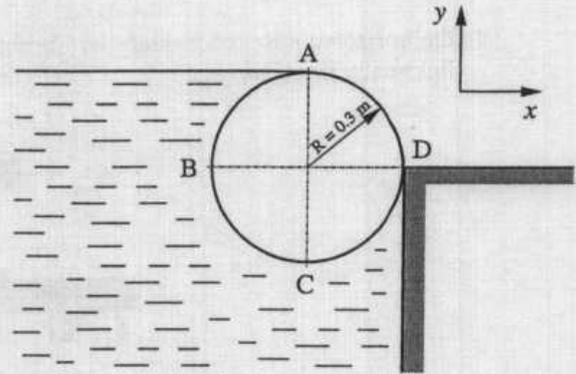


Abbildung 3: Zylinder der Länge  $L$  in Wasser

- Gegeben ist folgende Luftdruckverteilung in der bodennahen Erdatmosphäre in Abhängigkeit von der Höhe über dem Erdboden  $x_2$ :

$$P = P_0 e^{-(x_2/c)}, \quad (3)$$

wobei  $c$  eine Konstante ist. Berechnen Sie die Temperaturverteilung  $T(x_2)$  und die Dichteverteilung  $\rho(x_2)$  in Abhängigkeit von der Höhe  $x_2$ .

#### Aufgabe 4:

Auf eine feststehende Turbinenschaufel (siehe Abb. 4) trifft ein Wasserstrahl der Geschwindigkeit  $c_1$ , der Dichte  $\rho$  und der Querschnittsfläche  $A_1$ . Der ankommende Strahl teilt sich in zwei Strahlen mit den Geschwindigkeiten  $c_2$  und  $c_3$ . Berechnen Sie unter Vernachlässigung von Reibungs- und Gravitationskräften:

- die vertikale Reaktionskraft der Turbinenschaufel,
- die horizontale Reaktionskraft der Turbinenschaufel,
- die vertikale Reaktionskraft der Turbinenschaufel, wenn diese sich mit der Geschwindigkeit  $u$  von links nach rechts bewegt,
- die horizontale Reaktionskraft der Turbinenschaufel, wenn diese sich mit der Geschwindigkeit  $u$  von links nach rechts bewegt.

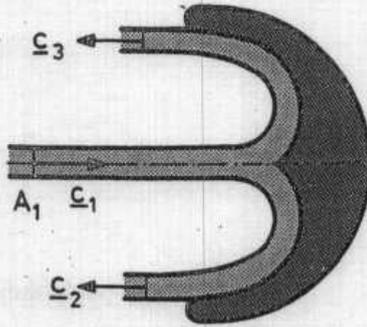


Abbildung 4: Von einer Turbinenschaufel abgelenkter Wasserstrahl

#### Aufgabe 5:

Bei der Strömung eines Fluids der Dichte  $\rho$  und der dynamischen Viskosität  $\mu$  durch ein Rohr mit dem Durchmesser  $D$  und der Länge  $\Delta L$  wird bei einem Volumenstrom  $\dot{V}$  ein Druckverlust  $\Delta P$  gemessen. Die Rohrwand hat eine Rauigkeit  $\delta$ .

- Geben Sie folgende Größen des o.g. Problems an:
  - die Zielgröße,
  - die geometrischen Variablen,
  - die physikalischen Größen,
  - den prozessbezogenen Parameter.
- Formulieren Sie die Dimensionsmatrix und wählen Sie natürliche Grundgrößen für das Problems aus. Wieviele dimensionslose Parameter besitzt das Problem (einschließlich der dimensionslosen Zielgröße)?
- Bestimmen Sie diese dimensionslosen Parameter des Problems.
- Was ist der Vorteil bei Verwendung dimensionsloser Parameter anstelle der unter a) genannten dimensionsbehafteten Einflussgrößen?



### Aufgabe 7:

In einer Hochdruckkammer, die mit Luft gefüllt ist, liegen vor:

$$P_H = 15 \text{ bar} , \quad T_H = 350 \text{ K} . \quad (5)$$

In der zugehörigen Niederdruckkammer herrscht der Druck  $P_N = 2 \text{ bar}$ .

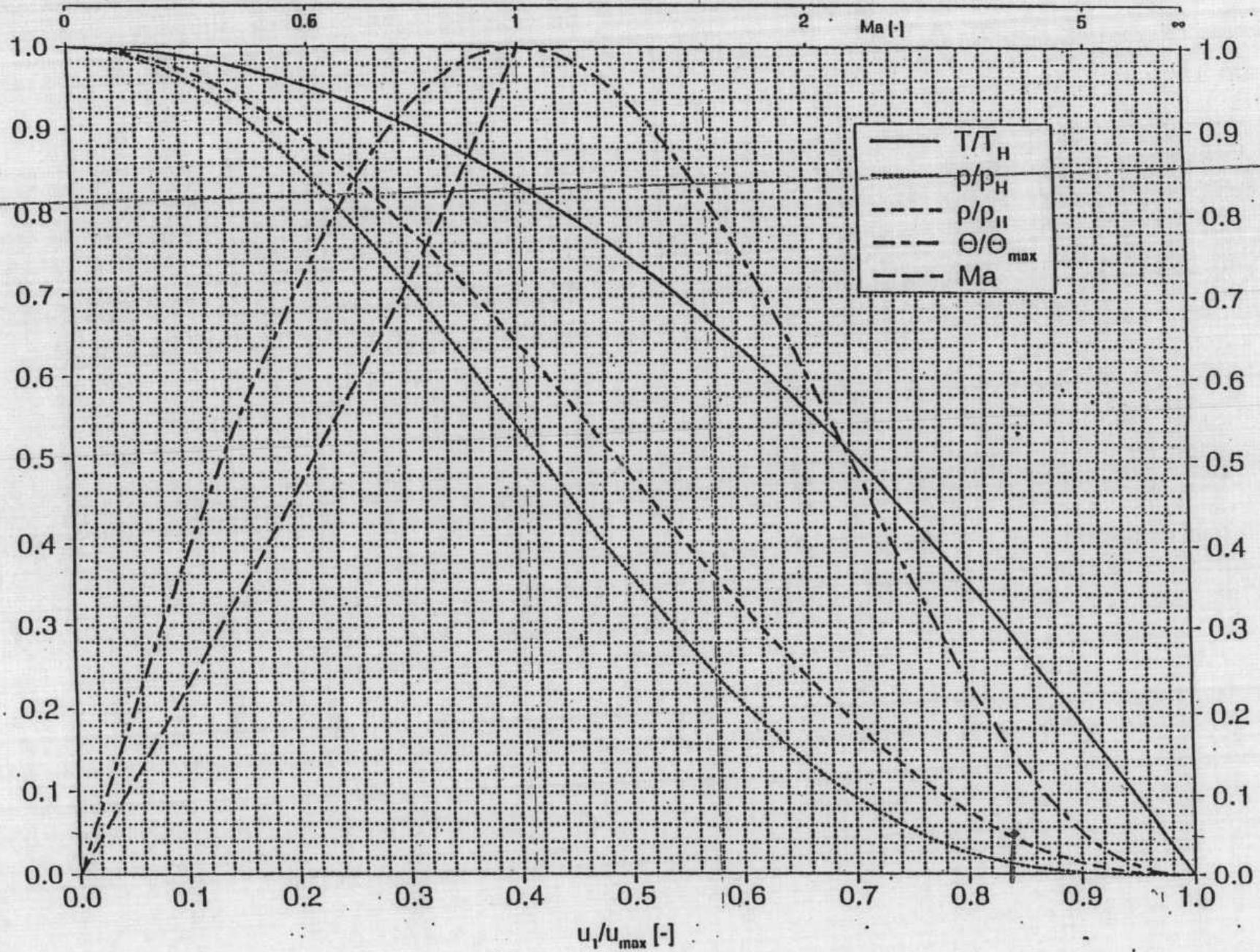
Beide Kammern verbindet eine Düse mit folgender Querschnittsflächenverteilung in Abhängigkeit der Längsordinate  $x_1$ :

$$F(x_1) = F_0 \left( 1 + \frac{(x_1 - L)^2}{2 L^2} \right) . \quad (6)$$

- Geben Sie allgemein die Lösungsschritte an, mit denen an jeder Stelle  $x_1$  der Druck  $P(x_1)$ , die Temperatur  $T(x_1)$  und die Dichte  $\rho(x_1)$  bestimmt werden können.
- Wie groß sind an der Stelle  $x_1 = 0$  die Werte für  $P$ ,  $T$  und  $\rho$ ?
- Wie groß sind an der Stelle  $x_1 = L/2$  die Werte für  $P$ ,  $T$  und  $\rho$ ?
- Wie groß sind an der Stelle  $x_1 = L$  die Werte für  $P$ ,  $T$  und  $\rho$ ?
- Welche Mach-Zahlen liegen bei  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = L/2$  und  $x_1 = L$  vor ?

*Hinweis:* Die spezifische Gaskonstante von Luft beträgt  $R_{\text{Luft}} = 286.9 \text{ J/(kg K)}$ . Benutzen Sie zur Lösung der Aufgabe das beigefügte Diagramm.

# Ausstromdiagramm ( $\kappa = 1.4$ )



**Prüfung in Strömungsmechanik I**  
für  
**Chemieingenieurwesen bzw. Chemie- und Bioingenieurwesen**  
**18. März 2002**

**Aufgabe 1:**

In den letzten 50 Jahren wurden wichtige experimentelle und numerische Verfahren der Strömungsmechanik entwickelt.

- Nennen Sie 3 experimentelle Verfahren und beschreiben Sie ihre prinzipielle Funktion.
- Nennen Sie 3 numerische Verfahren und erläutern Sie die Grundzüge ihrer Anwendung.

Sowohl für experimentelle als auch für numerische Untersuchungen ist es sehr wichtig, die mathematischen und physikalischen Grundlagen der Strömungsmechanik zu kennen. Dazu 3 Teilaufgaben.

- Zeigen Sie, dass sich das ideale Gasgesetz wie folgt schreiben läßt:

$$\frac{dP_{\mathfrak{R}}}{P_{\mathfrak{R}}} = \frac{d\rho_{\mathfrak{R}}}{\rho_{\mathfrak{R}}} + \frac{dT_{\mathfrak{R}}}{T_{\mathfrak{R}}}$$

- In der Vektoranalysis ist das Spatprodukt von drei Vektoren wie folgt angebar:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

↑ Vektorprodukt  
↑ Skalarprodukt

Verwenden Sie die Tensornotation, um das Spatprodukt auszudrücken.

- Geben Sie die Beschleunigung eines Fluidelements in die  $x_2$ -Richtung am Ort  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -1$  für das folgende Strömungsfeld an:

$$U_1 = (ax_1^2 + bx_2) \exp(-\alpha \cdot t); \quad U_2 = (ax_2 + b)$$

$$U_3 = ax_3 \cdot \exp(-\beta t)$$

**Aufgabe 2:**

Die Strömungsmechanik behandelt Fluide mit viskosen Eigenschaften. Die Elastizitätstheorie Festkörper mit elastischen Eigenschaften. Es sind die Eigenschaften Viskosität und Elastizität, die in der Strömungsmechanik zur Unterscheidung von Medien herangezogen werden.

- Was versteht man unter der Viskosität eines Mediums. (Unterscheiden Sie zwischen dynamischer und kinematischer Viskosität)

Was ist der thermodynamische Druck eines Fluids? Ist er mit dem mechanischen Druck eines Newtonischen Mediums identisch?

- Die Enthalpie ist wie folgt definiert:  $h_{\mathfrak{R}} = e_{\mathfrak{R}} + P_{\mathfrak{R}} \cdot v_{\mathfrak{R}}$ . Multipliziert man diese Beziehung mit der Masse  $\rho_{\mathfrak{R}}$  des Einheitsvolumen  $\mathfrak{R}$  erhält man:

$$\rho_{gr} h_{gr} = \rho_{gr} e_{gr} + P_{gr}$$

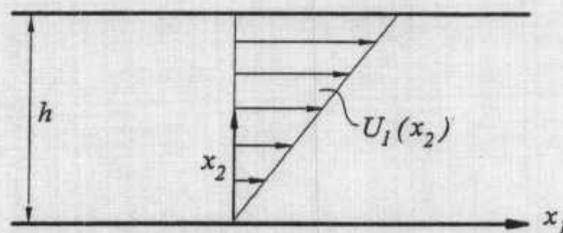
Erklären Sie die Druckenergie  $P_{gr}$ . Läßt sich die Enthalpie auch in Feldgrößen schreiben, d. h.  $h = e + P \cdot v$ ? Begründen Sie Ihre Antwort. ✓

Neben thermodynamischen Kenntnissen sind auch mathematische und kinematische Kenntnisse zur Behandlung von Strömungsproblemen erforderlich.

Wenn eine Couette-Strömung mit  $U_1 = \frac{U}{h} \cdot x_2$  gegeben ist, d.h. es gilt  $\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = 0$  und  $U_3 = 0$ ,

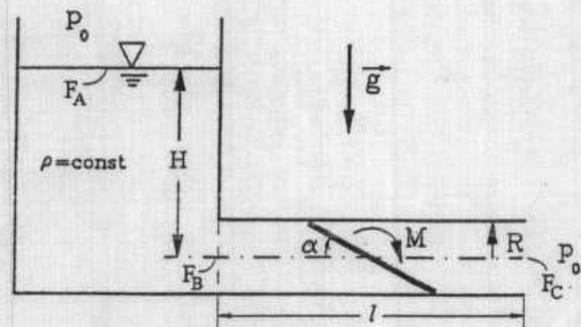
erheben sich die folgenden Fragen:

- Wie groß sind die Dehnungsgeschwindigkeiten für ein Einheitsselement in  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ -Richtung? !
- Wieviele Komponenten hat der Deformationsratentensor und wie lauten sie? ✓
- Wieviele Komponenten hat der Drehgeschwindigkeitstensor und wie lauten sie? ✓



### Aufgabe 3:

Der skizzierte, an einem Behälter angeschlossene Kanal ist durch eine ebene Platte, die um den Winkel  $\alpha$  gegenüber der Kanalachse geneigt ist, verschlossen. Die ebene Platte ist um die zur Zeichenebene senkrechte Symmetrieachse drehbar gelagert und wird durch das Moment  $M$  gegen den Wasserdruck geschlossen gehalten.

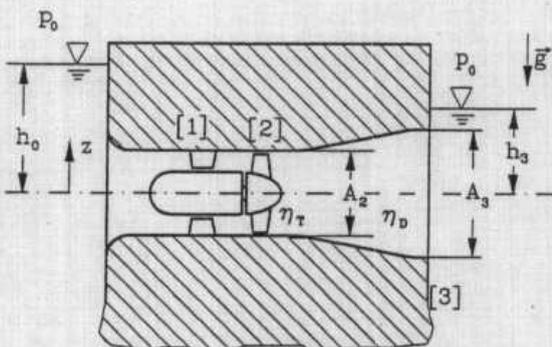


Gegeben:  $H, h, \alpha, \rho, g, l$

- Wie groß ist die Kraft auf die Platte und deren Komponente in die Rohrachsenrichtung?
- Welches Moment  $M$  ist notwendig, um die Klappe geschlossen zu halten?
- Wird die Platte gedreht und in Achsenlage gebracht, so fließt Wasser durch den Kanal aus. Wie groß sind die Ausflußgeschwindigkeiten, wenn  $F_A, F_B$  und  $F_C$  bekannt sind und eine reibungsfreie Bewegung vorliegt? Wie groß sind  $U_A, U_B$  und  $U_C$  wenn gilt  $h \ll H$ .
- Wie groß ist der Druck  $P_B$  für  $R \ll H$ .
- Berechne den Ausfluß für den Fall dass der Druckverlust im Kanal mittels des Druckverlustes einer laminaren Strömung beschrieben werden kann. ✓

### Aufgabe 4:

Rohrturbine



Die nebenstehende Skizze zeigt eine Rohrturbine eines Flußkraftwerks. Bekannt sind neben den Geometriedaten und dem Volumenstrom  $\dot{V}$  der mechanische Wirkungsgrad  $\eta_T$  der Turbine und der Diffusorwirkungsgrad  $\eta_D$ . Die Strömung ist vor und hinter der Turbine ausgeglichen und rein axial. Für den Diffusorwirkungsgrad gilt:

$$\eta_D = \frac{(P_3 - P_2)_{\text{real}}}{(P_3 - P_2)_{\text{ideal}}}$$

Für den Diffusorverlust läßt sich schreiben:

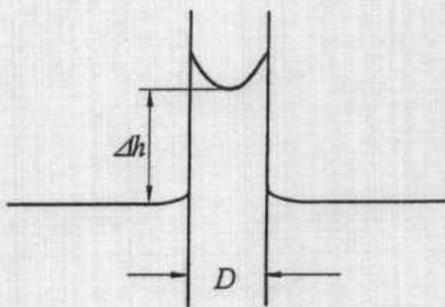
$$P_2 + \frac{\rho}{2} U_2^2 = P_3 + \frac{\rho}{2} U_3^2 + \Delta P_{v,D}$$

- Welche Leistung  $P_{zu}$  führt die strömende Flüssigkeit der Turbine zu?
- Welche Leistung könnte im Idealfall der Turbine zugeführt werden?
- Was ist der hydraulische Wirkungsgrad  $\eta_H$  der Anlage?
- Was ist die Maximalleistung, die der Turbine zugeführt werden kann? Begründen Sie Ihre Aussage.
- Wie ließe sich der gesamte hydraulische Wirkungsgrad der Anlage verbessern?

### Aufgabe 5:

Wird ein beiderseits offenes kleines Rohr (Kapillare) senkrecht in Wasser getaucht, siehe Skizze, so wird das Wasser infolge von Kapillarkräften nach oben steigen. Aus Experimenten wird ermittelt, dass gilt:

$$\Delta h = f(D, \rho, g, \sigma)$$



$\Delta h$  = Steighöhe  
 $\sigma$  = Oberflächenspannung  
 $D$  = Rohrdurchmesser  
 $g$  = Gravitationskonstante  
 $\rho$  = Dichte

$$\frac{N}{m} = \frac{kg}{s^2}$$

- Durch welche Kennzahlen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  lassen sich die in einem Experiment erhaltenen Ergebnisse verallgemeinert darstellen?

Nachstehend sind Ähnlichkeitskennzahlen angegeben. Beantworten Sie folgende allgemeine Fragen.

- b) Durch welche Ähnlichkeitszahl läßt sich das Verhältnis der Beschleunigungskräfte zu Viskositätskräften ausdrücken. Begründen Sie dies.

Die Reynoldszahl kann als das Verhältnis von Diffusionszeit zu Konvektionszeit angegeben werden. Begründen Sie dies gleichfalls.

- c) Die Weber-Zahl  $We = \rho_c U_c^2 \frac{l_c}{\sigma_c}$  gibt das Verhältnis von Trägheits- zu Kapillarkräften an, d. h. zu Oberflächenkräften. Nutzen Sie die We-Zahl, um die charakteristische Geschwindigkeit des Problems zu definieren, d.h. drücken Sie die Weber-Zahl als Verhältnis der charakteristischen Strömungsgeschwindigkeit  $U_c$  und der charakteristischen Kapillargeschwindigkeit aus.
- d) Die laminare, voll entwickelte Rohrströmung läßt sich durch die unten aufgeführte Gleichung angeben.

$$0 = -\frac{d\Pi}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU_z}{dr} \right)$$

Zeigen Sie, dass die vollentwickelte Rohrströmung durch die Hagen-Zahl:  $Ha = Re \cdot Eu$  darstellen läßt, d. h. durch eine Ähnlichkeitszahl aus dem Produkt der Reynolds- und Euler-Zahl. Alle voll entwickelten laminaren Rohrströmungen sind durch diese Hagen-Zahl charakterisiert.

- e) Unten ist eine Tabelle angegeben, die Ähnlichkeitszahlen aufzeigt.

$Re = \frac{vl}{\nu}$	Reynolds-Zahl	$Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$	Euler-Zahl
$Re \cdot Eu = Ha$	Hagen-Zahl	$Sr = \frac{l}{tv} = \frac{fl}{v}$	Strouhal-Zahl
$Ma = \frac{v}{c}$	Mach-Zahl	$Fr = \frac{v}{\sqrt{gl}}$	Froude-Zahl
$We = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}$	Weber-Zahl	$Ec = \frac{v^2}{c_p T_w}$	Eckert-Zahl
$Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda_w}$	Prandtl-Zahl	$Pe = Pr \cdot Re$	Péclet-Zahl

Geben Sie bitte die physikalische Bedeutung von Ma, Fr, Ec, Pr an.

### Aufgabe 6:

Für die Potentialströmung, die sich aus einer Quelle der Ergiebigkeit  $\dot{Q}$  einem im Uhrzeigersinn drehenden Wirbel der Zirkulation  $\Gamma$  und einer Parallelströmung zur  $x_1$ -Achse mit dem Wert  $U_\infty$  zusammensetzt, soll das komplexe Potential  $F(z)$  angegeben werden. Dazu folgende Fragen und Aufgaben:

- a) Warum lassen sich die komplexen Potentiale der Einzelströmungen addieren?
- b) Bestimmen Sie die Beziehungen für  $U_1(x_1, x_2)$  und  $U_2(x_1, x_2)$  ✓

- c) Hat die Strömung Staupunkte und wo liegen diese? ✓
- d) Was passiert wenn  $U_\infty \rightarrow \infty$  und  $\dot{Q}$  und  $\Gamma$  endliche Werte beibehalten?
- e) Diskutieren Sie die Lagen des Staupunktes, wenn  $\dot{Q}$  und  $\Gamma$  Extremwerte 0 bzw.  $\infty$  annehmen.

### Aufgabe 7:

In einer Hochdruckkammer, die mit Luft gefüllt ist, liegen vor

$$P_H = 20 \text{ bar}, T_H = 300^\circ\text{K} \text{ und } \rho_H = \frac{P_H}{RT_H}$$

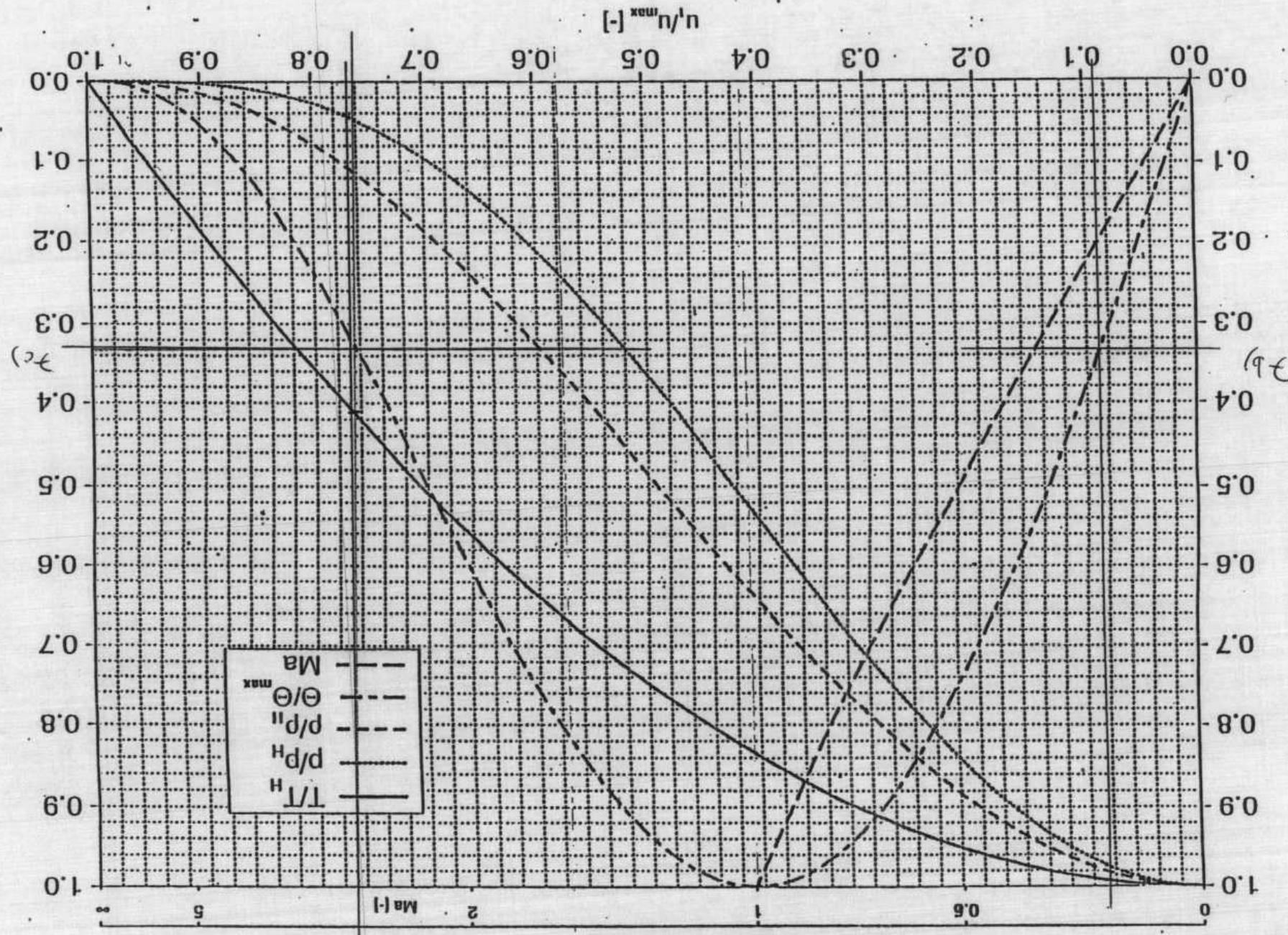
In der zugehörigen Niederdruckkammer liegt der Druck  $P_N = 1 \text{ bar}$  vor.

Beide Kammern sind mit einer Düse verbunden, die folgende Querschnittsflächenverteilung hat.

$$F(x_1) = F_0 \left( 2 + \cos \left( 2\pi \frac{x_1}{L} \right) \right)$$

- a) Geben Sie allgemein die Lösungsschritte an, die an jeder Stelle  $x_1$ ,  $P(x_1)$ ,  $T(x_1)$ ,  $\rho(x_1)$  und  $U_1(x_1)$  zu bestimmen erlauben. ✓
- b) Wie groß sind an der Stelle  $x_1 = 0$ :  $P$ ,  $T$ ,  $\rho$  und  $U_1$ ? ✓
- c) Wie groß sind an der Stelle  $x_1 = L$ :  $P$ ,  $T$ ,  $\rho$  und  $U_1$ ? ✓
- d) Wie groß sind an der Stelle  $x_1 = L/2$ :  $P$ ,  $T$ ,  $\rho$  und  $U_1$ ? ✓
- e) Wie groß sind die Mach-Zahlen bei  $x_1 = 0, L/2, L$ ? ✓

# Ausstromdiagramm ( $\kappa = 1.4$ )



$u/u_{max}$  [-]

$\rho/\rho_H$

$\rho/\rho_H$

- $T/T_H$
- - -  $p/p_H$
- · -  $\rho/\rho_H$
- · ·  $Ma$

---

## Strömungsmechanik I (Chemieingenieurwesen)

### Prüfung

Prof. Dr. Dr.h.c. F. Durst  
Lehrstuhl für Strömungsmechanik  
FAU Erlangen-Nürnberg

2. April 2001, 09:00 – 12:00 Uhr

---

**Die Prüfung besteht aus 10 Aufgaben und einer Zusatzaufgabe.**

In der Vorlesung Strömungsmechanik I wurden die mathematischen und physikalischen Grundlagen des Fachgebietes behandelt. Beantworten Sie die zu diesen Grundlagen unten aufgeführten Fragen.

1. Aufgabe: Mathematische Grundlagen

1.1 Warum ist die Tensornotation für die Darstellung der Grundgleichungen der Strömungsmechanik wichtig?

Erklären Sie das Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}_i$  und  $\vec{e}_j$  eines kartesischen Koordinatensystems.

1.2 Das Permutationssymbol  $\varepsilon_{ijk}$  ist wie folgt definiert:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{falls zwei der Symbole } i, j, k \text{ denselben Wert haben} \\ 1 & \text{falls } i, j, k \text{ eine zyklische Permutation von } 1, 2 \text{ und } 3 \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } i, j, k \text{ eine antizyklische Permutation von } 1, 2 \text{ und } 3 \text{ ist} \end{cases}$$

Von welcher Ordnung (Stufe) ist dieser Tensor? Wieviele Komponenten besitzt er?

1.3 Stellen Sie die folgenden Größen in Tensornotation dar:

- grad T
- div  $\vec{U}$
- rot  $\vec{U}$
- grad  $\vec{U}$

Um wieviele Ordnungen erhöht bzw. reduziert der Gradient, die Divergenz und die Rotation den Tensor, auf den die Operation angewendet wird?

1.4 Was versteht man unter dem Deformationsratentensor  $\varepsilon_{ij}$  (Deformationstensor) und wie ist er definiert?

1.5 Sind die folgenden Gleichungen nach der Summationskonvention zulässig? Begründen Sie Ihre Antwort bei den unzulässigen Schreibweisen.

a)  $a_i b_{jj} = c_i d_{kk}$

b)  $a_i b_i = c_i d_j$

c)  $a_m b_n = c_{nm}$

d)  $a_i b_k = c_i d_j$

e)  $\mu_{mn} A_m = c_n F_{ii}$

2. Aufgabe: Physikalische Grundlagen

2.1 Erklären Sie in Worten die dynamische Viskosität  $\mu$  als molekularen Impulstransportterm.

2.2 Was ist die Zustandsgleichung für ein thermodynamisch ideales Gas und wie sieht die Gleichung für eine thermodynamisch ideale Flüssigkeit aus?

2.3 Erklären Sie in Worten, falls nötig auch mit Gleichungen, den Druck eines idealen Gases durch die Stöße von Kugeln mit einer Wand.

2.4 Geben Sie die Definitionsgleichungen für die Enthalpie und für die Entropie an.

2.5 Wie lauten die Gleichungen für den ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik?

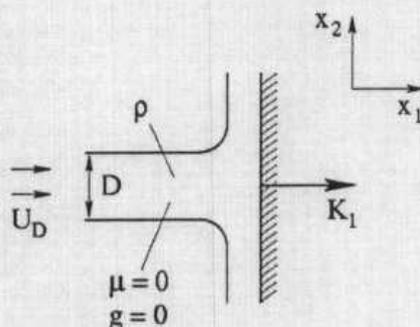
3. Aufgabe: Kinematische Betrachtungen und die Ableitung der Grundgleichungen waren ein wesentlicher Bestandteil der Strömungsmechanik I-Vorlesung. Beantworten Sie aus diesen Gebieten die unten aufgeführten Fragen:

3.1 Was sind die Bahnlinien und die Streichlinien und welchem Gebiet der Darstellungen (Euler- oder Lagrange-Darstellungen) sind sie zuzuordnen? Was versteht man unter den Stromlinien eines Geschwindigkeitsfeldes?

3.2 Geben Sie die Kontinuitäts-, die Impuls- und die mechanische Energiegleichung in Differentialform an.

3.3 Leiten Sie die Integralform der Kontinuitätsgleichung ab und erklären Sie die vor der Gesamtmasse stehende partielle Ableitung nach der Zeit.

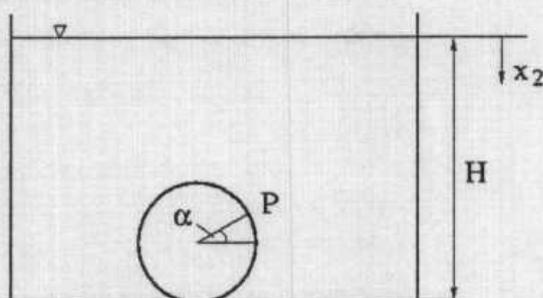
3.4 Leiten Sie die integrale Form der Impulsgleichung ab und wenden Sie diese an, um die Kraft  $K_1$  auf die Platte in der Skizze zu bestimmen. Der auf die Platte treffende Strahl hat rechteckigen Querschnitt der Höhe  $D$  und der Breite  $B$ .



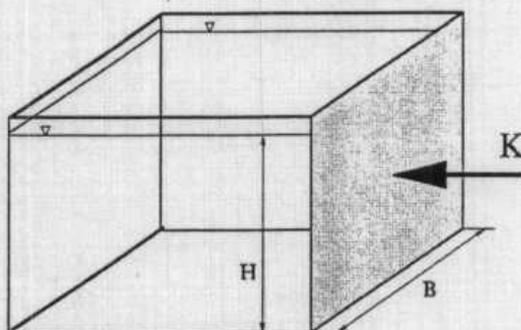
3.5 Zeichnen Sie ein kartesisches Koordinatensystem und tragen Sie dort die Richtung der molekularbedingten Impulstransportterme  $\tau_{21}$ ,  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{32}$  und  $\tau_{12}$  ein.

4. Aufgabe: Das Gebiet der Hydro- und Aerostatik ist ein Sondergebiet der Strömungsmechanik, das dadurch gekennzeichnet ist, daß keine Fluidgeschwindigkeiten auftreten. Beantworten Sie aus diesem Gebiet die unten aufgeführten Fragen:

- 4.1 Geben Sie die Grundgleichung der Hydrostatik und Aerostatik an und auch die thermodynamischen Zustandsgleichungen, die es für  $\rho$  zu berücksichtigen gilt, um hydrostatische bzw. aerostatische Aufgaben zu lösen.
- 4.2 In einem Aquarium mit der Wasserhöhe  $H$  liegt auf dem Boden ein Zylinder mit dem Radius  $R$  (siehe Skizze). Geben Sie den Druck an, der an Punkt  $P$  auf den Zylindermantel wirkt. Hierbei bildet die Horizontale und die Verbindungslinie zwischen der Mittelachse des Zylinders und des Punktes  $P$  einen Winkel von  $\alpha = 30^\circ$ .



- 4.3 Wie groß ist die gesamte Vertikalkraft, die von dem Fluid auf den Zylinder aus Aufgabe 4.2 ausgeübt wird, wenn der Zylinder die Länge  $L$  hat? Achten Sie auf das richtige Vorzeichen.
- 4.4 Ein Aquarium (siehe Skizze) enthält Wasser mit der Höhe  $H$ . Die Breite einer Seitenwand des Aquariums ist  $B$ . Wie groß ist die Kraft  $K$  mit der diese Seitenwand gehalten werden muß, um der Druckkraft entgegenzuwirken, die aufgrund des Wassers im Aquarium auf die Seitenfläche wirkt?



- 4.5 Wie ändert sich in der Normalatmosphäre der Druck mit der Höhe über der Meeresoberfläche? Wie ändert sich die Temperatur?

Aufgabe 5: Bei Ähnlichkeitstheoretischen Betrachtungen von Strömungsvorgängen werden unterschiedliche Kennzahlen eingeführt, die gleich sein müssen, wenn Strömungen mit geometrisch ähnlichen Berandungen in allen Teilen ähnlich sein sollen. Beim Auftreten von Wärme- und Stoffübertragung kommen zusätzliche Ähnlichkeitskennzahlen hinzu. Bitte beantworten Sie aus diesem Bereich der Strömungsmechanik die unten aufgeführten Fragen:

- 5.1 Nennen Sie Zahlen, die die molekulare Ähnlichkeit zwischen Strömungsvorgängen zum Ausdruck bringen.
- 5.2 Nennen Sie Kenngrößen, welche die makroskopische Ähnlichkeit einer Strömung zum Ausdruck bringen und die bei der Normierung der Impulsgleichung auftreten.
- 5.3 Es gibt auch Ähnlichkeitszahlen, welche die Ähnlichkeit der Wärmeübertragung und der Massenübertragung angeben. Nennen Sie diese Zahlen.
- 5.4 Es soll der Strömungswiderstand  $K_w$  einer Kugel gemessen werden. Betrachtungen zeigen, daß er vom Kugeldurchmesser  $D$ , der Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$ , der Dichte  $\rho$  und der kinematischen Viskosität  $\nu$  eines Fluids vollständig bestimmt ist. Damit kann angeschrieben werden:  $K_w = f(D, U_\infty, \rho, \nu)$

Nutzen Sie die Dimensionsanalyse, um möglichst allgemeingültig die Ergebnisse von Messungen des Widerstands in Abhängigkeit von den aufgeführten Variablen darzustellen.

- 5.5 Der Druckverlust in Rohren hängt im wesentlichen vom Massenstrom des durchströmenden Fluids, von der Dichte  $\rho$ , von der dynamischen Viskosität  $\mu$ , vom Durchmesser  $D$  und von der Rauigkeit  $k$  ab. Bestimmen Sie mit Hilfe der Dimensionsanalyse, wie in allgemeingültiger Form die bei Messungen erhaltenen Druckverlustwerte darzustellen sind, damit die für Luft erhaltenen Ergebnisse auch auf andere Newtonsche Fluide übertragen werden können.

Aufgabe 6: Ein Strahltriebwerk wird auf einem Versuchsstand getestet (siehe Skizze). Es werden gemessen:

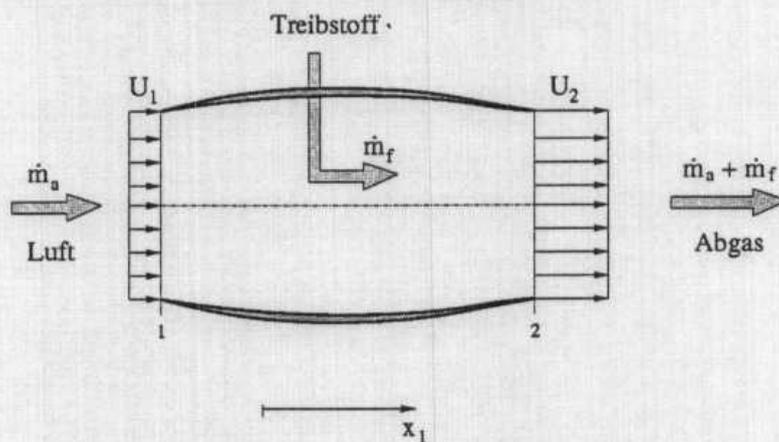
$$U_1 = 100 \text{ m/s}, U_2 = 1.000 \text{ m/s}$$

$$P_1 = P_2 = P_0 \text{ (atmosphärischer Druck)}$$

$$\dot{m}_f = \frac{1}{50} \dot{m}_a \quad (\dot{m}_a = \text{Luftmassenstrom}, \dot{m}_f = \text{Brennstoffmassenstrom})$$

$$A_1 = A_2 = 0,2 \text{ m}^2 \text{ (Eintritts- und Austrittsquerschnitt)}$$

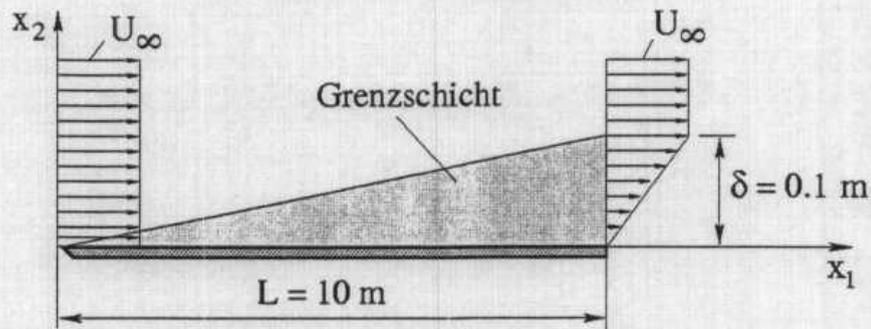
$$\rho_{a,1} = 1,3 \text{ kg/m}^3 \text{ (Dichte der Luft am Eintritt)}$$



- 6.1 Welche Terme der integralen Impulsgleichung aus Aufgabe 3.4 bleiben für das vorliegende Problem bestehen?
- 6.2 Berechnen Sie die Schubkraft des Triebwerks.
- 6.3 Wie würde sich eine Verkleinerung der Ausgangsfläche  $A_2$  auf die Schubkraft auswirken?
- 6.4 Ist der gemessene Schub auch im Flugzustand zu erwarten?
- 6.5 Wodurch wird bei Triebwerken die Geschwindigkeitserhöhung im Austritt, im Vergleich zum Eintritt, erreicht?

Aufgabe 7: An einer ebenen Platte, die überströmt wird, erfährt die Strömung einen Impulsverlust. Hieraus resultiert eine Kraft auf die Platte.

- 7.1 Welche Terme der Integralform der Impulsgleichung bleiben für die Kraftberechnung übrig?
- 7.2 Wie groß ist die Kraft  $K(L)$



mit  $U_\infty = 10 \text{ m/s}$ ,  $\delta = 0,1 \text{ m}$ ,  $L = 10 \text{ m}$ ,  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

Hinweis: Beachten Sie, daß die Massenbilanz an dem von Ihnen gewählten Kontrollvolumen erfüllt sein muß.

- 7.3 Geben Sie das Vorzeichen der Kraft auf die Platte an, unter Berücksichtigung der  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung in der obigen Abbildung.
- 7.4 Wie erklärt sich die Kraft auf die Platte?
- 7.5 Wie lautet die Bestimmungsformel für die Kraft  $K_1(x_1)$ , die auf den Plattenabschnitt zwischen Vorderkante und einer beliebigen Stelle  $x_1$  wirkt, wenn man vereinfachend annimmt, daß die Grenzschicht linear anwächst?

Gibt es eine Kraft in  $x_2$ -Richtung?

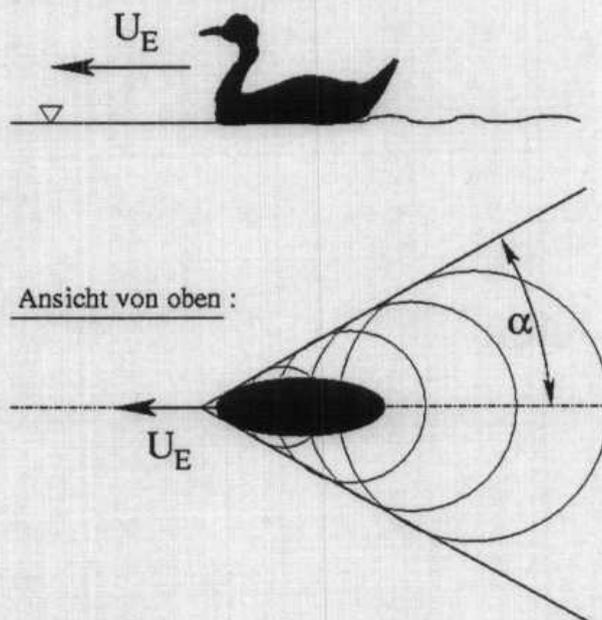
Aufgabe 8: Eine Potentialströmung hat das folgende komplexe Potential

$$F(z) = U_\infty \cdot z + \frac{\dot{Q}}{2\pi} \cdot \ln z + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

- 8.1 Aus welchen Einzelströmungen setzt sich die Potentialströmung zusammen?
- 8.2 Hat die Strömung Staupunkte und wo liegen diese? Begründen Sie den Aufstau der Strömung durch die Summe der einzelnen 3 Strömungen.
- 8.3 Wie bestimmt man Potential und Stromlinien der Strömung? (Nicht im Detail rechnen, nur erläutern)
- 8.4 Wie geht man vor, wenn man die Staustromlinie bestimmen möchte? (Nicht im Detail rechnen, nur erläutern)
- 8.5 Skizzieren Sie die Strömung.

Aufgabe 9: Schallwellen breiten sich in Fluiden mit der Schallgeschwindigkeit aus.

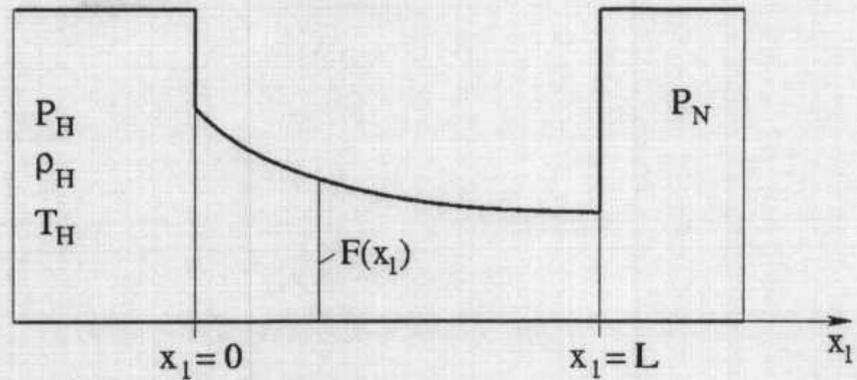
- 9.1 Wie lautet die Kontinuitätsgleichung in  $\frac{dU_1}{U_1}$ -,  $\frac{d\rho}{\rho}$ - und  $\frac{dF}{F}$ -Termen?
- 9.2 Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit in Luft bei  $T=500^\circ\text{K}$   
 $(\kappa = 1,4, \bar{R} = 8,314\text{ J}/(\text{mol K}), n = 28,96\text{ g/mol})$ ?
- 9.3 Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit in Wasser, wenn es als ideale Flüssigkeit behandelt wird?
- 9.4 Die Gleichungen  $\frac{P}{\rho^\kappa} = \text{const}$  und  $\frac{P}{\rho} = RT$  sind zu erläutern.
- 9.5 In der Abbildung sehen Sie eine Ente, die mit der Geschwindigkeit  $U_E$  auf einem Teich schwimmt. Die von ihr ausgehenden Wellen breiten sich mit der Geschwindigkeit  $c$  aus. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen  $U_E$ ,  $c$  und dem Winkel  $\alpha$ . Was passiert, wenn die Ente so langsam schwimmt, daß  $U_E$  kleiner als  $c$  wird?



Aufgabe 10: Ein Hochdruckbehälter hat die folgenden Werte für Luft ( $\kappa = 1,4$ ):  $P_H = 20\text{ bar}$ ,  $\rho_H = 15\text{ kg/m}^3$ .

10.1 Wie groß ist  $T_H$  ( $R_{\text{Luft}} = 286,9\text{ J}/(\text{kgK})$ )?

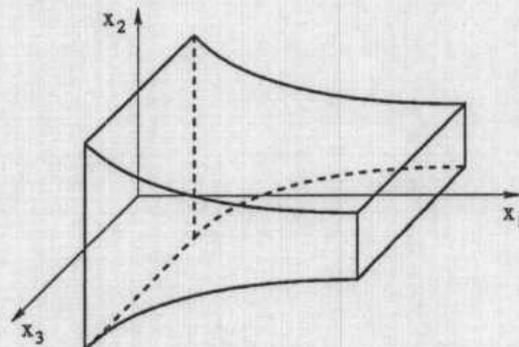
10.2 Eine Düse mit  $F(x_1) = F_0 \left( 1 + \frac{(x_1 - L)^2}{2L^2} \right)$  ist an den Druckbehälter angeschlossen, mit  $F_0 = 0,1\text{ m}^2$  und  $L = 0,5\text{ m}$ . Zeichnen bzw. skizzieren Sie die Düse maßstabsgetreu.



- 10.3 Berechnen Sie  $P(x_1)$ ,  $\rho(x_1)$ ,  $T(x_1)$  für  $P_N = 1$  bar für  $x_1 = \frac{L}{2}$ .
- 10.4 Wie ist die Geschwindigkeit im Düsen Eintritt und wie groß ist  $\dot{m}$  ?
- 10.5 Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit bei  $x_1 = 0$ ?

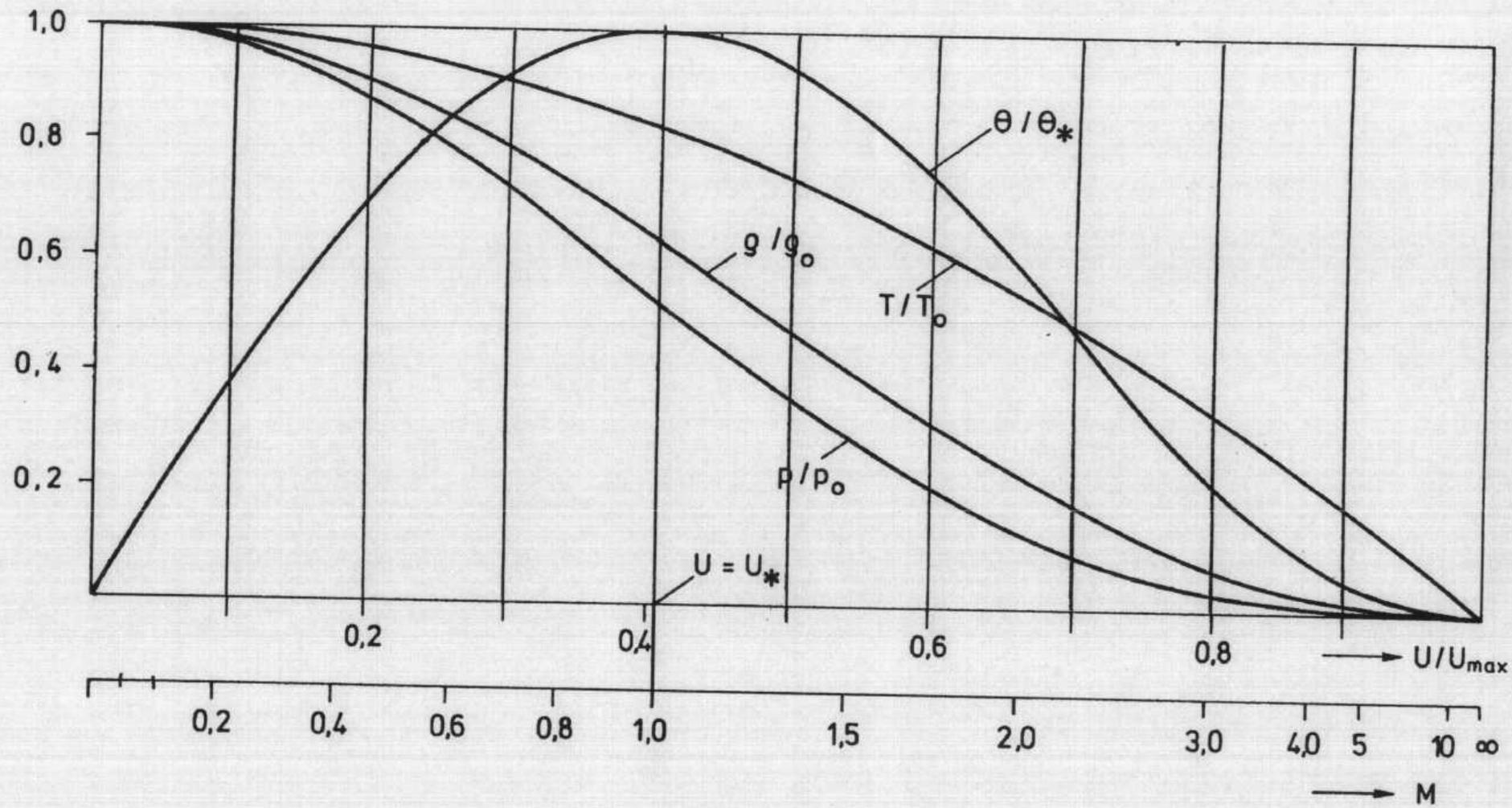
Aufgabe 11: **Zusatzaufgabe**

- 11.1 Wie funktioniert ein LDA-System?
- 11.2 Die Geschwindigkeit auf der  $x_1$ -Achse der skizzierten Düse soll vermessen werden.



In welcher Ebene liegen die beiden Strahlen eines LDA-Systems?

- 11.3 Sind Messungen mit Vorwärts- oder Rückwärtsstreuung zu bevorzugen?
- 11.4 Im engsten Querschnitt der Düse, die mit Wasser durchströmt wird, tritt Kavitation auf. Worauf geht diese zurück? Erklären Sie mit Formeln!
- 11.5 Tritt Kavitation mit oder ohne Viskosität früher auf?



# Strömungsmechanik I für Chemie-Ingenieure

## Prüfung

10. April 2000, 09.00–12.00

Prof. Dr. Dr. h. c. Dr. h. c. F. Durst  
Lehrstuhl für Strömungsmechanik  
Universität Erlangen-Nürnberg

Die Prüfung besteht aus 7 Aufgaben auf 3 Seiten.

### Aufgabe 1

- Nennen Sie mindestens 6 wichtige Forscher, die nach Ihrer Meinung zur Entwicklung der heutigen Strömungsmechanik beigetragen haben. Was waren die Beiträge der von Ihnen angegebenen Forscher?
- In der Strömungsmechanik gibt es zwei Ansätze, mit denen Strömungsphänomene beschrieben werden können. Diese beiden Betrachtungsweisen sind nach Lagrange und Euler benannt. Erläutern Sie die beiden Betrachtungsweisen und geben Sie ihre charakteristischen Merkmale an.
- Was versteht man unter dem *Reynoldsen Transport Theorem*? Erläutern Sie dieses Theorem.
- Was versteht man unter einem Fluidelement und wie ist es definiert?
- Schreiben Sie die Zeitvariation  $\frac{dT_R}{dt}$  in Feldvariablen.

### Aufgabe 2

- Leiten Sie die Massenerhaltungsgleichung (Kontinuitätsgleichung) in Differentialform ab.
- Leiten Sie die Integralform der Kontinuitätsgleichung ab und erläutern Sie die einzelnen Terme.
- Geben Sie die Impulsgleichung und die mechanische Energiegleichung der Strömungsmechanik in Differentialform an.
- Erklären Sie die folgenden Terme in der Energiegleichung:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_j^2 \right); \quad -\frac{\partial (P U_j)}{\partial x_j}; \quad P \frac{\partial U_j}{\partial x_j}; \quad -\frac{\partial (\tau_{ij} U_j)}{\partial x_i} \quad (1)$$

- Was versteht man unter der Rotation eines Strömungsfeldes (Gleichung oder physikalische Erklärung)?

### Aufgabe 3

- Leiten Sie aus der allgemeinen Impulsgleichung die Grundgleichung der Hydro- und Aerostatik her.
- In einem kartesischen Koordinatensystem seien  $x_1$ - und  $x_3$  die horizontalen Raumrichtungen und  $x_2$  die vertikale. Geben Sie in diesem Koordinatensystem den Vektor  $g_i$  des Gravitationsfeldes an.
- In einem Aquarium variiert der hydrostatische Druck linear mit der Höhe. Leiten Sie dies aus der hydrostatischen Grundgleichung her.
- Eine Messung des Druckfeldes in der Atmosphäre ergibt folgenden exponentiellen Zusammenhang mit der Höhe  $x_2$ :

$$P = P_0 \exp(-x_2/c) \quad (2)$$

wobei  $c$  eine Konstante sei. Berechnen Sie die Temperaturverteilung in der Atmosphäre und benennen Sie die Annahmen, die Sie bei der Herleitung gemacht haben.

### Aufgabe 4

- Leiten Sie aus der differentiellen Form der Impulsgleichung die Integralform derselben Gleichung her.
- Unter welchen Bedingungen verschwindet der Druckterm in der Integralform der Impulsgleichung für ein gegebenes Kontrollvolumen?
- Lösen Sie das folgende Problem unter Benutzung der Integralform der Impulsgleichung, d.h. berechnen Sie die Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  unter der Voraussetzung, daß  $g_i = 0$ ,  $\partial/\partial t(\dots) = 0$  und  $\mu = 0$ .

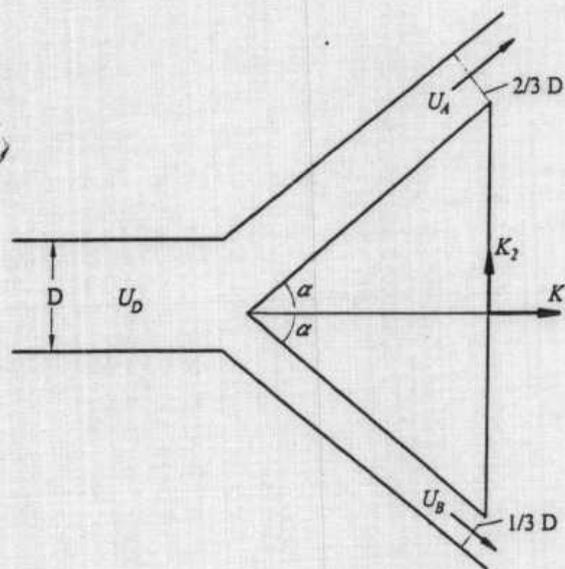


Abbildung 1: Zweidimensionale Strömung, Strahlteilung durch einen Keil

- Welche Richtung hat die resultierende Kraft auf den Keil? Erläutern Sie Ihre Antwort physikalisch.

### Aufgabe 5

- Geben Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen an. Was drücken diese Gleichungen aus?
- Welche Beziehung besteht zwischen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und der Strömungsmechanik, d.h. wie lassen sich die Geschwindigkeitskomponenten  $U_1$  und  $U_2$  durch die Strom- bzw. die Potentialfunktion darstellen?
- Was bedeuten die Begriffe *komplexes Potential* und *komplexe Geschwindigkeit*?
- Eine Strömung entsteht durch die Überlagerung einer Quelle mit der Quellstärke  $\dot{Q}$  im Ursprung des Koordinatensystem und einer Parallelströmung mit der Geschwindigkeit  $U_\infty$  in Richtung der  $x_1$ -Achse. Wo befinden sich die Staupunkte dieser Strömung?
- Wie kann man die Stromlinien einer Potentialströmung finden, wenn die Potentialfunktion  $F(z) = \Phi + i\Psi$  für einen ebenen Halbkörper gegeben sei:

$$F(z) = U_\infty z + \frac{\dot{Q}}{2\pi} \ln(z) \quad (3)$$

### Aufgabe 6

- In der Gasdynamik wird die Strömung nicht nur durch die Reynoldszahl, sondern auch durch die Machzahl charakterisiert. Geben Sie die Definition beider Zahlen an. Was ist die physikalische Bedeutung dieser beiden dimensionslosen Zahlen?
- Wenn das Temperaturfeld  $T(x, t)$  in einem Fluid bekannt ist, wie kann dann die Schallgeschwindigkeit im gesamten Gebiet berechnet werden? Nehmen Sie an, bei dem Fluid handele es sich um ein ideales Gas.
- Ein Gas expandiert durch eine konvergente Düse von einem Hochdruckbehälter in einen Niederdruckbehälter. Kann die Strömung jemals Überschallgeschwindigkeit erreichen? Erläutern Sie Ihre Antwort.
- Was versteht man unter der kritischen Geschwindigkeit bei einer Düsenströmung? An welcher Stelle in der Düse kann sie auftreten? Was ist die Beziehung zwischen dem kritischen Druck und dem Druck im Hochdruckbehälter?

### Aufgabe 7

- Für eine stationäre, zweidimensionale, vollentwickelte Strömung kann das Geschwindigkeitsfeld durch eine eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben werden. Geben Sie diese Differentialgleichung an.
- Was versteht man unter einer Couette-Strömung? Wie vereinfacht sich die in Aufgabenteil a) angegebene Differentialgleichung für eine Couette-Strömung?
- Ein Fluid fließt über eine schiefe Ebene mit dem Massenstrom  $\dot{m}$  und bildet einen Flüssigkeitsfilm von der Dicke  $\delta$  aus. Berechnen Sie das Geschwindigkeitsprofil des Films, wenn der Neigungswinkel  $\alpha$  der Ebene sowie die Dichte  $\rho$  und die Viskosität  $\mu$  des Fluids gegeben sind.
- Wenn die Dicke des Films verdoppelt werden soll, wie ist dann das Verhältnis zwischen dem dafür erforderlichen neuen Massenstrom und  $\dot{m}$ ?

# Fluid Mechanics I for Chemical Engineers

## Examination

April 10<sup>th</sup> 2000, 09:00-12:00

Prof. Dr. Dr. h. c. Dr. h. c. F. Durst  
Institute of Fluid Mechanics  
University of Erlangen-Nuremberg

The examination consists of 7 problems on 3 pages.

### Problem 1

- Name at least 6 of the important researchers who, in your opinion, have contributed considerably to the development of modern fluid mechanics, as we apply it today. What was the major contributions of each of the researchers you have named?
- Two important ways to describe fluid mechanics phenomena are named after Lagrange and Euler. Explain these and give the characteristic features of both these ways to describe fluid flow phenomena.
- What is the so-called *Reynolds Transport Theorem*? Give an explanation of the theorem.
- What is a fluid element, and how is it defined?
- Write the time variation  $\frac{dT_R}{dt}$  in field variables.

### Problem 2

- Derive the mass conservation equation (continuity equation) in differential form.
- Derive the integral form of the continuity equation and explain the terms.
- Write down the momentum and the mechanical energy equations of fluid mechanics in differential form.
- Explain the following terms of the energy equation:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_j^2 \right); \quad -\frac{\partial (P U_j)}{\partial x_j}; \quad P \frac{\partial U_j}{\partial x_j}; \quad -\frac{\partial (\tau_{ij} U_j)}{\partial x_i} \quad (1)$$

- What do you understand under the rotation of a velocity field (formula or physical explanation)?

### Problem 3

- Derive, from the general momentum equation, the equation for hydro- and aerostatics.
- If the  $x_1$ - and  $x_3$ -directions of Cartesian co-ordinates are in a horizontal plane and the  $x_2$ -direction is vertical, write down the vector  $g_i$  for the gravitational field.
- In an aquarium, the hydrostatic pressure varies linearly with the height. Show this from the equation for hydro- and aerostatics.
- In the atmosphere, the pressure field is measured and shown to have an exponential relationship with the height:

$$P = P_0 \exp(-x_2/c) \quad (2)$$

where  $c$  is a constant. Find the temperature distribution in this atmosphere, stating your assumptions.

#### Problem 4

- Derive from the differential form of the momentum equation the integral form of the same equation.
- Under what conditions does the pressure term in the integral form of the momentum equation disappear for a given control volume?
- Solve the following problem by utilising the integral form of the momentum equation, i.e., find the forces  $K_1$  and  $K_2$ , assuming that  $g_i = 0$ ,  $\partial/\partial t(\dots) = 0$  and  $\mu = 0$ .

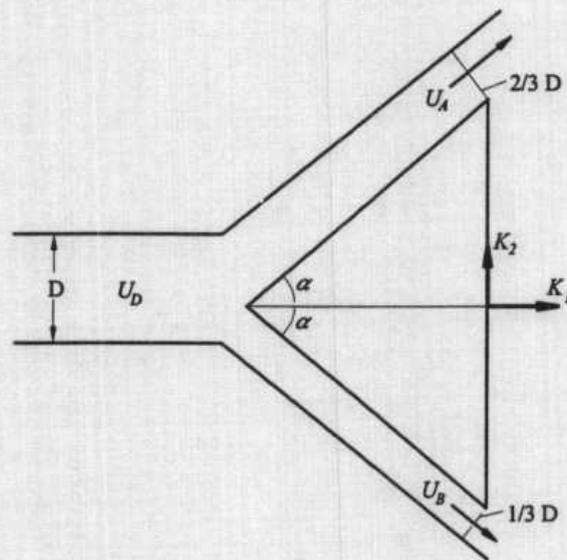


Figure 1: Two-dimensional flow, separated by a wedge.

- Which direction does the resultant force on the wedge have? Explain your answer physically.

#### Problem 5

- Write down the Cauchy-Riemann equations. What do they express?
- How are the Cauchy-Riemann equations related to fluid mechanics, i.e., how are the velocity components  $U_1$  and  $U_2$  defined in terms of the stream- and the potential functions?
- What do we mean by a *complex potential* and a *complex velocity*? What is the relationship between the two?
- A flow consists of a source of strength  $\dot{Q}$  located at the origin of a Cartesian co-ordinate system and a flow parallel to the  $x_1$ -axis with the velocity  $U_\infty$ . Where are the stagnation points of this flow located?
- How can the stream lines be obtained if the potential function  $F(z) = \Phi + i\Psi$  is given, e.g., for a two-dimensional half body:

$$F(z) = U_\infty z + \frac{\dot{Q}}{2\pi} \ln(z) \quad (3)$$

### Problem 6

- a) In gasdynamics, flows are not only characterised by Reynolds number, but also by the Mach number. Give the definitions of both numbers. What are the physical meanings of the dimensionless numbers?
- b) If the temperature field  $T(x_i, t)$  in a fluid is known, how can the field of the speed of sound for an ideal gas be computed?
- c) A gas expands through a converging nozzle from a high pressure tank to a low pressure tank. Can the flow ever become supersonic? Explain your answer.
- d) What is the critical velocity in a nozzle flow? At which point in the nozzle can this velocity occur? How is the critical pressure related to the pressure in the high pressure tank?

### Problem 7

- a) For steady, two-dimensional, and fully developed flows, the velocity field can be expressed by a one-dimensional, second order differential equation. Write down this differential equation.
- b) What is a Couette flow? How can the equation found in a) be simplified for a Couette flow?
- c) A fluid flowing over an inclined slope with a given mass flow  $\dot{m}$  develops into a film with thickness  $\delta$ . Find the velocity profile inside the film, when the angle  $\alpha$  of the slope, the density  $\rho$  and the viscosity  $\mu$  of the fluid are given.
- d) Express the new mass flow in terms of  $\dot{m}$  when the film thickness is doubled.