MVT Formelsammlung

Daniel Ludwig & Sebastian Werner, 2005

Keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit!

1 Kennzeichnung von Partikeln

1.1 Übersicht

- x_F - Feret Durchmesser: parallele Tangenten senkrecht zur Messrichtung
- x_M - Martin Durchmesser: halbiert Projektionsfläche parallel
- x_C - Längste Sehne (parallel)
- x_s - Durchmesser der oberflächengleichen Kugel
- x_v - Durchmesser der volumengleichen Kugel
- x_A - Durchmesser projektionsflächengleiche Kugel
- x_W - Durchmesser der Kugel mit gleicher Sedimentationsgeschwindigkeit

1.2 Formeln

- Reynolds-Zahl

$$\boxed{Re = \frac{\rho x_w}{\eta}}$$

- Für $Re < 0,25$:

$$x_w = \sqrt{\frac{18\eta w_s}{(\rho_p - \rho_f)g}}$$

- Formfa´ktor:

$$\Psi_{AB} = \frac{x_A}{x_B}$$

- Spärizität:

$$\Psi_{V,S}^2 = \frac{x_v^2}{x_s^2} \leq 1$$

- Wichtige Daten für Kugel:

$$V = \frac{\pi}{6}x^3 \qquad S = \pi x^2 \qquad A = \frac{\pi}{4}x^2$$

- Volumenspezifische Oberfläche

$$S_v = \frac{S}{V} = \frac{\pi x_s^2}{\frac{\pi}{6}x_v^3} \qquad S_m = \frac{S}{M} = \frac{S}{\rho V} = \frac{S_v}{\rho}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \Psi_{V,m} \cdot x_m \\ x_s = \Psi_{S,m} \cdot x_m \end{array}\right\} S_V = \frac{6}{x_m}\frac{\Psi_{S,m}^2}{\Psi_{V,m}^3}$$

$$\boxed{S_v = 6 \cdot \Psi_{S,V}^2 \frac{M_{2,0}}{M_{3,0}} = \frac{6\Psi_{S,V}^2}{M_{1,2}}}$$

Würfel: $S_V = 0,81$

2 Bewegung von Partikeln

2.1 Definitionen

- Relativgeschwindigkeit

$$\boxed{\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{w}} \qquad \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{w}}{dt}$$

- Bewegungsgleichung

$$\boxed{\underbrace{m_p \frac{d\vec{w}}{dt}}_{\text{stationär:}=0} = \sum_i \vec{F}_i}$$

2.2 Wirkende Kräfte

- Gewichtskraft

$$\vec{F}_g = \rho_p \frac{\pi}{6} x_v^3 \vec{g} = m_p \vec{g}$$

- Elektr. Kraft

$$\vec{F}_{el} = Q\vec{E}$$

- Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_z = m_p \omega^2 r = M_p \frac{v^2}{r} \qquad \text{mit:} v = r\omega$$

- Trägheitskraft

$$\vec{F}_i = m_p a = \rho \frac{\pi}{6} x_v^3 \frac{d\vec{w}}{dt}$$

- Widerstandkraft

$$\vec{F}_w = \frac{\rho_f}{2} |v_{rel}| \, v_{rel} \frac{\pi}{4} x_s^2 c_D(Re)$$

Spezialfall: Stokes-Bereich

$$F_w = 3\pi\eta x \vec{v}_{rel}$$

- Schwerefeld / Zentrifugalfeld

$$\vec{F}_A = -v_p grad\, p \quad \text{mit:} \quad \begin{array}{ll} grad\, p = \rho_f g & \text{Schwerefeld} \\ grad\, p = \rho_f \vec{r}\omega^2 & \text{Zentrifugalfeld} \end{array}$$

- Kräfte auf Grund ungleichmäßiger Bewegung ($Re < 1$)

$$\vec{F}_w = \underbrace{3\pi\eta x v_{rel}}_{Stokes} + \underbrace{\frac{\pi}{12} x^3 \rho_f \frac{d\vec{v}_{rel}}{dr}}_{\text{Virtuelle Masse}} + \underbrace{\frac{3}{2} x^2 \sqrt{\pi \rho_f \eta} \int_0^t \frac{\dot{\vec{v}}_r el}{\sqrt{t - t'}} dt'}_{\text{Basset-Term (Grenzschicht)}}$$

- Kräfte auf Grund von Partikelrotation ($Re < Re_R < 0,25$, $Re_R = \frac{x^2 \rho_f}{\eta} \frac{dv}{dy}$)

$$\vec{F}_{saff} = 1,61 x^2 \sqrt{\frac{\rho_f}{|\vec{\omega}_f|}} \left[\vec{v} - \vec{w}\right] \times \vec{\omega}_f \qquad \text{mit:} \quad \vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$$

2.3 Bereiche der Partikelbewegung

2.3.1 Stokes Bereich $Re < 1$

$$c_d = \frac{24}{Re} \qquad \text{mit Gasblasen in fl.:} c_d = \frac{16}{Re}$$

$$F_w = 3\pi\eta x \vec{v}_{rel}$$

2.3.2 Übergangsbereich $1 < Re < 10^3$

$$c_d = \frac{21}{Re} + \frac{6}{\sqrt{Re} + 0,28}$$

2.3.3 Quadratischer Bereich $10^3 < Re < Re_c$

$$F_w \approx \frac{\pi}{16} \rho_f x^2 |\vec{v}_{rel}| \vec{v}_{rel} \qquad c_d \approx 0,5 \approx const$$

2.3.4 Kritischer / Überkritischer Bereich $Re >= Re_c$

$$Re_c = 3 \cdot 10^5 \qquad c_d = 0,3$$

$$Tu^2 \cdot Re_c = 45 \qquad Tu = \sqrt{\frac{v'^2}{\bar{v}}} \qquad \text{mit:} \quad v = \bar{v} + v'$$

2.4 Analystische Lösung des stationären Bereiches

$$\sum_i F_i = 0 = \vec{F}_g + \vec{F}_w + \vec{F}_A$$

$$\frac{\pi}{4} x^2 \frac{\rho_f}{2} |\vec{v}_{rel}| \vec{v}_{rel} \, c_d(Re) + \frac{\pi}{6} x^3 (\rho_p - \rho_f) = 0$$

$$\frac{3 \rho_p x}{4 \rho_f c_d(Re)} \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p}\right) \vec{g}$$

ruhendes Medium: $v = 0 \rightarrow \vec{v}_{rel} = -\vec{w}$

$$\boxed{w^2 = \frac{3 \rho_p x}{3 \rho_f c_d(Re)} \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p}\right) \vec{g}}$$

Bzw. für $Re < 0,25$ (mit: $c_d = \frac{24}{Re}$)

$$\boxed{w_{st} = \frac{(\rho_p - \rho_f) x_{st}^2 g}{18 \eta}}$$

Für größere Re-Zahlen nutzt man

$$\boxed{Ar = \frac{\Delta\rho \, x^3 g}{\nu^2 \rho_f}} = \frac{3}{4} Re^2 c_d(Re)$$

$$\boxed{\Omega = \frac{\rho_f \, w_s^2}{\Delta\rho \, \nu g}} = \frac{4 \, Re}{3 \, c_d(Re)}$$

2.5 Beschleunigte Partikelbewegung

- Bewegungsgleichung

$$\frac{\pi}{6} x^3 \rho_p \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = \frac{\pi}{6} x^3 \rho_p \frac{d \vec{v}_{rel}}{dt} = \frac{\pi}{4} x^2 |\vec{v}_{rel}| \vec{v}_{rel} \frac{\rho_f}{2} c_d(Re) + \vec{F}_i$$

- Kopplung für alle 3 Raumrichtungen:

$$|\vec{v}_{rel} = \sqrt{(v_x - w_x)^2 + (v_y - w_y)^2 + (v_z - w_z)^2} \qquad c_d = f(Re(v_{rel}))$$

- Bremsstrecke ($t \rightarrow \infty$, $Re < 0,25$, Ruhendes Gas)

$$s_\infty = w_0 \tau = w_o \frac{\rho_p x^2}{18 \eta}$$

- Trägheitsparameter

$$\Psi = \frac{s_\infty}{d_k}$$

3 Partikelgrößenverteilungen

3.1 Definitionen

- Verteilungssumme $[-]$

$$\boxed{Q_r(x_i) = \frac{\text{Menge der Partikel} \quad x \leq x_i}{\text{Gesamtanzahl Partikel}} = \frac{N_i}{\sum_i N_i}}$$

- Verteilungsdichte $[L^{-1}]$

$$\boxed{q_r(\bar{x}_i) = \frac{\text{Menge Partikel im Interval} \quad x_i < x < x_{i+1}}{\text{Intervallbreite} \cdot \text{Gesamtanzahl Partikel}}}$$

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \qquad \Delta Q = \frac{\Delta\mu}{\mu_{ges}} \qquad \Delta Q_{r,i} = q_{r,i}\Delta x_i$$

$$\boxed{q_r(\bar{x}_i) = \frac{Q(x_{i+1}) - Q(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta Q}{\Delta x}}$$

Somit für infenitisimal kleine Intervalle:

$$\boxed{q_r(x) = \frac{dQ_r(x)}{dx}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{Q_r(x) = \int_{x_{min}}^{x} q_r(x)dx}$$

Hierbei:

$$Q(x_{min}) = 0 \quad Q(x_{max}) = 1 \quad \int_{x_{min}}^{x_{max}} q_r(x)dx = 1 \quad \int_{x_1} x_2 q_r(x)dx = Q(x_1) - Q(x_2)$$

3.2 Momente

- Definition

$$\boxed{M_{k,r} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x^k q_r(x)dx = \sum_i \bar{x}^k \underbrace{q_r(\bar{x}_i)\Delta x_i}_{\Delta Q_i = \frac{\Delta\mu}{\mu_{ges}}}}$$

- Integraler Mittelwert

$$M_{k,o} = \overline{x^k}$$

- Umrechnung:

$$\boxed{q_r(x) = \frac{\bar{x}^{r-l} q_l(x)}{M_{r-l,l}}}$$

3.3 Abszissensubstitution

$$q_r(\xi) = \frac{dx}{d\xi} q_r(x) \quad \text{wegen:} \quad dQ_r(x_1, x_2) = dQ_r(\xi_1, \xi_2) \quad \text{und} \quad \xi = f(x)$$

3.4 Unvollständiges Moment

$$M_{k,r}(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} = x^k q_r(x)\,dx = \frac{M_{k+r,0}(x_1, x_2)}{M_{r,0}} = \frac{M_{k+r-l,l}(x_1, x_2)}{M_{r-l,l}}$$

3.5 Verteilungsparameter

- Medianwert:

$$x_{50,r} : Q_r(x_{50,r}) = 0,5$$

- Modalwert:

$$\frac{dq_r(x_{mod})}{dx} = 0$$

- Gewogenes Mittel:

$$x_{1,r} = M_{1,r} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x q_r(x)\, dx$$

- Arithmetisches Mittel:

$$\overline{x^k} = M_{k,0}$$

- Varianz der Verteilung (bzw. Standardabweichung):

$$s_r^2 = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (x - x_{1,r})^2 q_r(x)\, dx = M_{2,r} - M_{1,r}^2$$

- Breite der betrachteten Verteilung (in der Praxis):

$$0,05 < Q_r(x) < 0,95$$

3.6 Spezifische Oberfläche

$$S_v = \frac{6\Psi_{S,V}^2}{M_{1,2}} = 6\Psi_{S,V}^2 \frac{M_{2,0}}{M_{3,0}} = 6\Psi_{S,V}^2 M_{-1,3}$$

$$\boxed{S_v = 6f \sum_i^n + \frac{\Delta Q_3}{\bar{x}_i}}$$

f ist ein Formfaktor.

3.7 Darstellung von Verteilungen

3.7.1 Potenzfunktion

Auftragung von $\log(Q_3)$ gegen $\log(x)$.

$$D(x) = Q(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{x_{max}}\right)^m & x \leq x_{max} \\ 1 & x > x_{max} \end{cases}$$

Parameter:
x_{max} gibt die Lage des *Knicks* an. Die Steigung/Breite wird durch m determiniert.

3.7.2 RRSB Funktion

$$D(x) = Q(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{x_{50,3}}\right)^2 \cdot \ln 2\right]$$

$$\log\log\left(\frac{1}{1 - Q(x)}\right) = n \cdot (\log x - \log x') + \log\log e$$

Wobei:

$$\frac{x_{50,3}}{x'} = \sqrt{n}\ln 2 \quad 1 - D(x) = 1 - Q(x) = R(x)$$

Parameter:
x' bzw $x_{50,3}$ geben die Lage an. Die Breite wird durch n determiniert.

$$D(x') = Q(x') = 0,632$$

3.7.3 Normalverteilung / Standard Normalverteilung (lin. Abszisse)

- Mittelwert:
$$\bar{x} = x_{50,r} = x_{1,r} = \int_0^\infty x q_r(\xi)\, d\xi$$
- Varianz:
$$s^2 = \int_0^\infty (x-\bar{x}) q_r(\xi)\, d\xi$$
- Dichtefunktion:
$$q_r(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(0,5 \cdot \left(\frac{x-\bar{x}}{2s^2}\right)^2\right)$$
- Normierung auf z:
$$z = \frac{x-\bar{x}}{s}$$
- Symmetrische Standard Normalverteilung:
$$\boxed{q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)}$$

3.7.4 Logarithmische Normalverteilung (log. Abszisse)

$$q(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\, x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{\bar{x}}\right)}{\sigma}\right)^2\right]$$

Normierung:
$$z = \frac{\ln \frac{x}{\bar{x}}}{\sigma}$$
$$q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right)$$

Parameter:
Lage via $\bar{x} = x_{50,r}$, Streuung durch $\sigma = \ln \frac{x_{84}}{x_{50}} = \ln \frac{x_{50}}{x_{16}}$
Hilfreich:
$$x_{50,1} = x_{50,r} \exp\left((1-r)\sigma^2\right)$$
Beachte: Q_0 ist gegenüber Q_3 nach links verschoben!

4 Trennung

4.1 Definitionen

Feingut-/Grobgutanteil:

$$\boxed{g = \frac{m_g}{m_a} = \frac{q_a(x) - q_f(x)}{q_g(x) - q_f(x)}} \qquad \boxed{f = \frac{m_f}{m_a} = \frac{q_a(x) - q_g(x)}{q_f(x) - q_g(x)}}$$

Massenbilanz:
$$m_a = m_f + m_g \qquad 1 = g + f$$
$$\boxed{dQ = \frac{dM}{M}} \qquad dM = dQ\, M = M\, q\, dx$$
$$\boxed{\begin{aligned} q_a(x) &= g\, q_g(x) + f\, q_f(x) \\ Q_a(x) &= g\, Q_g(x) + f\, Q_f(x) \end{aligned}}$$

Hier sollte ein Bild hin, was q_a, $f\,q_f$ und $g\,q_g$ darstellt.
Feingut:

$$f = \int_{x_{min}}^{x_t} q_a(x)dx = Q_a x_t - Q_a(x_{min})$$

Grobgut:

$$g = \int_{x_t}^{x_{max}} q_a(x)dx = 1 - Q_a(x_t)$$

Trenngrad

$$\boxed{T(x) = \frac{\text{Menge mit Größe} x \cdots x + dx \quad \text{im Grobgut}}{\text{Menge mit Größe} x \cdots x + dx \quad \text{im Aufgabegut}}}$$

Somit ergibt sich:

$$\boxed{T(x) = \frac{dM_g(x)}{dM_a(x)} = \frac{M_g\, q_g(x)\, dx}{M_a\, q_a(x)\, dx} = g\frac{q_g(x)}{q_a(x)} = 1 - \frac{q_f(x)}{q_a(x)}}$$

Alternativ auch:

$$\boxed{T(x) = g\frac{Q_g(x_{i+1}) - Q_g(x_i)}{Q_a(x_{i+1}) - Q_a(x_i)}} = \frac{g\, q_g(x)}{g\, q_g(x) + f\, q_f(x)} = \frac{1 - \frac{q_f}{q_a}}{1 - \frac{q_f}{q_g}}$$

$$g_r = \int_{x_{min}}^{x_{max}} T(x)\, q_a(x)\, dx = \int_{x_{min}}^{x_0} T(x)\, q_a(x)\, dx + \int_{x_0}^{x_{max}} T(x)\, q_a(x)\, dx$$

$$g_r = \sum_{i=1}^{n} T(\bar{x}_i) \Delta Q_{a,r} \bar{x}_i$$

4.2 Trenngrenzen

Erste Variante:

$$x = x_{50,t} \qquad T(x) = 0,5 \qquad \text{wenn} \quad \boxed{f_{q_f} = g_{q_g}} \quad \text{Präparative Trenngrenze}$$

Zweite Variante: Gleichheit der Fehlausträge

$$\text{Grobgut} \quad F_g = g\int_{x_u}^{x_{a,t}} q_g(x)\, dx = gQ_g(x_{t,a}) \qquad \text{Feingut} \quad F_f = g\int_{x_{t,a}}^{x_o} q_f(x)\, dx = f(1 - Q_f(x_{a,t})$$

Nun:

$$F_g = F_f \qquad \boxed{f = Q_a(x_{a.t})}$$

4.3 Trennschärfe

$$\boxed{\kappa = \frac{x_{25,t}}{x_{50,t}}} \qquad T(x_{25,t}) = 0,25 \quad T(x_{50,t}) = 0,5$$

4.3.1 Ausbeute der Trennung

- Feinkornausbringung

$$\kappa_{a,f} = \frac{\int_{x_{min}}^{x_t} f\, q_f(x)\, dx}{\int_{x_{min}}^{x_t} q_a(x)\, dx}$$

- Grobkornausbringung

$$\kappa_{a,g} = \frac{\int_{x_t}^{x_{max}} g\, q_g(x)\, dx}{\int_{x_t}^{x_{max}} q_a(x)\, dx}$$

4.4 Schaltung von Klassierern

Hier sollte ein Bild hin, was das ganze darstellt.

4.4.1 Hintereinanderschalten

- Grobgut:

$$T_1 = \frac{m_{g,1}}{m_{a,1}} \frac{q_{g,1}}{q_{a,1}} \quad T_2 = \frac{m_{g,2}}{m_{a,2}} \frac{q_{g,2}}{q_{a,2}} \quad \rightsquigarrow \quad T_{ges} = \frac{m_g}{m_{a,1}} \frac{q_{g,2}}{q_{a,1}} = g \frac{q_{g,2}}{q_{a,1}}$$

$$\boxed{T_{ges} = \Pi\, T_i(x)} \qquad \boxed{g_{ges} = \Pi\, g_i}$$

- Feingut:

$$\boxed{1 - T_{ges} = \Pi\,(1 - T_i(x))} \qquad \boxed{1 - g_{ges} = \Pi\,(1 - g_i)}$$

4.4.2 Parallelschaltung

$$\boxed{T_{ges} = \frac{m_{A,1}}{m_A} T_1(x) + \frac{m_{A,2}}{m_A} T_2(x)}$$

4.5 Systematische Fehler bei Trennkurven

- Kurve fällt nicht auf 0 ab:

$$T'(x) = \frac{T(x) - \tau}{1 - \tau} \qquad \text{mit} \quad \tau = \frac{m_{a,2}}{m_a}$$

- Es tritt im unteren Bereich ein Minimum auf.
  Ursache: Unvollkommene Dispergierung.
- Es treten feinere Partikel auf, als in Aufgabegut vorhanden sind ($T(x) < 0$)
  Ursache: Partikel werden zermalen.

$$T(x) = 1 - f \frac{q_f(x)}{q_a(x)} < 0 \qquad \text{für} \quad f \frac{q_f(x)}{q_a(x)}$$

4.6 Anwendung auf Strömungstrennverfahren

4.6.1 Sedimentation

Suspensionsverfahren (homogene Verteilung) oder Überschichtungsverfahren (Schicht über Fluid)
Messmethoden:

1. Inkrementell - Lokale Konzentration

$$w_{sink} = \frac{h}{t} \qquad Q(t) = \frac{c(t)}{c_0} \qquad q(x) = \frac{dw_z}{dx} q(w)$$

2. Komulativ - Ansammlung in Messebene

$$\frac{m(t)}{m_{ges}} = \frac{t}{h} \int_0^{w_{t,max}} w_s\, q(w_s)\, dw_s = \mu$$

$$\mu = \frac{m(t)}{m_\infty} = 1 - Q_3(w_s) + \frac{t}{h} \int_0^{\frac{h}{t}} w_s q_3(w_s)\, dw_s$$

4.6.2 Gegenstrom Klassierung im Schwerefeld

$$\boxed{u = v - w_s}$$

Trennkurve: $u = 0$ somit

$$v = w_s = \frac{\Delta\rho\, g x_s^2}{18\eta}$$

Trennung:

- $x > x_s$ Grobgut
- $x < x_s$ Feingut

4.6.3 Querstromklassierung

$$u_x = v_x \qquad u_y = v_y - w_s$$

$$\frac{dy}{dt} = w_s \qquad \frac{dl}{dt} = v(y) \qquad dl = \frac{v(y)}{w_s}dy \quad \rightsquigarrow \quad L = \frac{\bar{v}}{w_{st}}H \quad \text{Achtung:} \quad v \neq f(y)$$

4.6.4 Partikelbewegung im Fliehkraftfeld - Potentialwirbel

1. Potentialwirbel $V\varphi(r)$ *BILD*
$$\vec{v}_\varphi = c_1$$
2. Potentialsenke *BILD*
$$\vec{v}_r = c_2$$
3. Wirbelsenke (Kombination der vorgenannten) *BILD*
$$\tan\beta = \frac{v_r}{v_\varphi} = \frac{c_2}{c_1} = const$$

Radialgeschwindigkeit hierbei:

$$\boxed{v_r = \frac{\dot{V}}{2\pi hr}}$$

Sinkgeschwindigkeit

$$w_s = \frac{v_r rg}{v_\phi^2} = const \cdot r^{2n}$$

4.6.5 Partikelbewegung im Fliehkraftfeld - Erzwungene Wirbel

Ausgelassen

5 Mischen

5.1 Gesamtheit

- Anzahl
$$\boxed{N_x + N_y = N}$$
- Konzentration
$$\boxed{p = \frac{N_x}{N}}$$
- Standardabweichung / Varianz (ideale Zufallsmischung)
$$\boxed{\sigma_{n_x}^2 = n \cdot p \cdot q} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{\sigma_x^2 = \frac{p \cdot q}{n}}$$

5.2 Probe

- Anzahl
$$\boxed{n_x + n_y = n}$$
- Konzentration
$$\boxed{x = \frac{n_x}{n}}$$
- Mischgüte (Varianz) einer Stichprobe (p bekannt)
$$s_k^2(x) = \frac{1}{k}\sum(x_i - p)^2$$

- Empirische Varianz (p unbekannt)

$$\boxed{s_{k-1}^2(x) = \frac{1}{k-1}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

- Mischungszusammensetzung p unbekannt: Arithmetisches Mittel der Probe und Erwartungswert

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{k}\sum^{k} x_i E(\bar{x})} \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum^{k} x_i = p$$

- Umrechnungen

$$\boxed{s_x^2 = \frac{s_{n_x}^2}{n^2}}$$

5.3 Mischungszustände

- Vollständige Entmischung

$$\sigma_0^2 = p(1-p) \qquad \begin{array}{ll} \text{p Fälle} & x=1 \\ \text{1-p Fälle} & x=0 \end{array}$$

- Ideale Homogenität (Kristall)

$$\sigma_{id}^2 = 0$$

- Stochatische Homogenität

$$\sigma^2(x) = p(1-p)\frac{v_x}{v_{pr}}$$

falls

$$\rho_x = \rho_y \qquad \sigma^2(x) = p(1-p)\frac{\bar{m}_x}{m_{pr}} = p(1-p)\frac{\rho k_v M_{3,0}}{m_p}$$

5.4 Binomialverteilung - Bernoulli Experiment $n \ll N$

Probe ohne zurücklegen kann wie Probenahme mit zurücklegen behandelt werden.

$$\boxed{h(n_x) = \binom{n}{n_x} p^{n_x} q^{n-n_x}}$$

Definition des Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{n_x} = \frac{n!}{n_x!\,(n-n_x)!}$$

Somit ergibt sich:

$$\boxed{\mu = np =} \qquad \boxed{\sigma_{n_x}^2 = npq} \qquad \boxed{\sigma_x^2 = \frac{p(1-p)}{n}}$$

5.5 Poisson-Verteilung $p \ll 1$ und $1 \ll n \ll N$

$$h(n_x) = \underbrace{\binom{n}{n_x} p^{n_x} q^{n-n_x}}_{\text{Bernoulli}} + \underbrace{n!\sqrt{2n\pi}\binom{n}{e}^n}_{\text{Stirling}} = \boxed{\underbrace{h(n_x) = \frac{\mu^{n_x}}{n_x!}e^{-\mu}}_{\text{Poisson}}}$$

hier gilt (diskrete Verteilung)

$$\boxed{\mu = np = \sigma_{n_x}^2}$$

5.6 Normalverteilung und Standardnormalverteilung $n \gg 1$ und $n_x, n_y \gg 1$

1. Normalwert

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma(x)}\right)^2\right]$$

Hierbei:

$$\mu_{n_x} = n \cdot p \qquad \sigma_{n_x}^2 = n \cdot p \cdot q \qquad \mu_x = p \approx \bar{x} \qquad \sigma_x^2 = p \cdot q \approx \frac{1}{k-1}\sum x_i$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

$$W(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma(x)}\right)^2\right]$$

2. Standardnormalverteilung

$$z := \frac{x-\mu}{\sigma(x)} \qquad f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] \qquad F^*(x) = \int_{\infty}^{z} f(z)\, dz$$

Intervall $a < x \leq b$

$$W(a < x \leq b) = F^*\left(z(a) < x \leq z(b)\right) = F^*\left(\frac{b-\mu_x}{\sigma(x)}\right) - F^*\left(\frac{a-\mu_x}{\sigma(x)}\right)$$

3. Approximation
Wenn $n \gg 1$ und $n_x, n_y \gg 1$ kann

$$\boxed{W(n_x = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}}$$

mit der Standardnormalverteilung approximiert werden

$$\boxed{W(n_x = a) \simeq W\left(a - \frac{1}{2} < n_x < a + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(n_x)} \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n_x - \mu n_x}{\sigma(nx)}\right)^2\right] dn_x$$

Alternativ für das Interval $a < n_x \leq b$

$$W(a < n_x \leq b) = \sum_a^b \binom{n}{n_x} p^{n_x} q^{n-n_x} \quad \rightsquigarrow \quad W(a < n_x \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(n_x)} \int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n_x - \mu n_x}{\sigma(n_x)}\right)^2\right] dn_x$$

4. Bernoulli Approximation mit Standardnormalverteilung Wird die abgeleitete Zufallsvariable z betrachtet:

$$\boxed{z = \frac{n_x - np}{\sqrt{nqp}} = \frac{n_x - \mu_{n_x}}{\sigma(n_x)} = \frac{x - \bar{x}}{\sigma(x)} = \frac{x-p}{\sigma(x)}}$$

ergibt sich:

$$W(a < n_x \leq b) = W\left(\frac{a-n_x}{\sigma(n_x)} < z < \frac{b-n_x}{\sigma(n_x)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

Hierbei sind:

$$\alpha = \frac{\overbrace{a - np}^{\Delta n_x} - 0.5}{\underbrace{\sqrt{npq}}_{\sigma(n_x)}} \qquad \beta = \frac{\overbrace{b - np}^{\Delta n_x} + 0.5}{\underbrace{\sqrt{npq}}_{\sigma(n_x)}}$$

Oder auch:

$$\alpha = \frac{\overbrace{x - \bar{x}}^{\Delta x}}{\sigma(x)} \qquad \beta = \frac{\overbrace{x - \bar{x}}^{\Delta x}}{\sigma(x)}$$

5.7 Relative Abweichung

$$\boxed{f_x = \frac{\Delta x}{p} = \frac{x-p}{p} = \frac{\Delta n_x}{np} = \frac{\Delta n_x}{\mu_{n_x}} = \frac{t\sigma(x)}{p} = \frac{t\sigma(\bar{x})}{\bar{x}} = \frac{t\sigma(x)\sqrt{k}}{\bar{x}}}$$

$$t = \frac{\Delta x}{\sigma(x)} \qquad \mu_x = p \qquad \mu_{n_x} = np \qquad \sigma_x^2 = \frac{pq}{n} \qquad \sigma_{n_x}^2 = npq$$

5.8 Stichprobenumfang

$$n = \frac{t^2}{f_x^2}\left(\frac{1}{p} - 1\right) \qquad f_x = \frac{\Delta x}{p} = \frac{t}{p}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

5.9 Beurteilung von Mischungen

Gesucht ist die unbekannte Zusammensetzung p einer Mischung. Diese kann durch den empirischen Mittelwert $\bar{x}$ von k Proben abgeschätzt werden.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{k}\sum x_i} \quad \boxed{\mu_{\bar{x}} = p} \quad \boxed{\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2(x)}{k}}$$

$$W\left(p - \Delta x \le \bar{x} \le p + \Delta x\right) = W\left(-\frac{\Delta x}{\sigma(\bar{x}} \le \frac{\bar{x}-p}{\sigma(\bar{x})} \le \frac{\Delta x}{\sigma(\bar{x}}\right) = W\left(-t \le \xi \le t\right)$$

$$\boxed{t = \frac{\Delta x}{\sigma(\bar{x})}} \qquad \xi = \frac{\bar{x}-p}{\sigma(\bar{x})}$$

$$W\left(-t \le \xi \le t\right) = F(t) - F(-t) = W\left(\bar{x} - t\sigma(x) \le p \le \bar{x} + t\sigma(x)\right)$$

meist ist jedoch $\sigma(x)$ bzw. $\sigma(\bar{x})$ unbekannt, deswegen nutzt man die empirische Varianz (s.o.)

$$\boxed{\underbrace{s_{k-1}^2(\bar{x})}_{\text{emp. Var. Stichprobenmittel}} = \underbrace{\frac{s_{k-1}^2}{k}}_{\text{emp. Var. Stichprobe}}}$$

$n = k - 1$ Student-t-Verteilung mit n Freiheitsgraden
Gesuchter Mittelwert p der Grundgesamtheit mit Wahrscheinlichkeit W im angegebenen Intervall um den experimentell bestimmten Mittelwert $\bar{x}$ liegt.

5.10 Vertrauensbereich der Varianz

ACHTUNG: $E(\bar{x}) = p$ VS. $E(s_{k-1}^2(x)) = \sigma^2(x)$!!
Deklaration einer neuen Zufallsvariablen:

$$\boxed{\chi^2 = (k-1)\frac{s_{k-1}(x)}{\sigma^2(x)}} \qquad \sigma^2(x) = \frac{s_{k-1}(x)}{x^2}$$

Wahrscheinlichkeit, dass die unbekannte Varianz $\sigma^2(x)$ im Intervall

$$(k-1)\frac{s_{k-1}^2(x)}{\chi_o^2} \le \sigma_x^2 \le (k-1)\frac{s_{k-1}^2(x)}{\chi_u^2}$$

liegt, ist gegeben durch

$$\varphi(\chi^2) = K_k(\chi^2)^{(k-2)/2}\exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)$$

, welches tabelliert ist.

$$W = W\left(\chi_u^2 \le \chi \le \chi_o^2\right) = \int_{\chi_u^2}^{\chi_o^2} \varphi(\chi^2)\, d\chi^2$$

Es interessiert im Normalfall nur ein oberer Grenzwert für $\sigma(x)$ für $\chi_0 \to \infty$:

$$\boxed{\sigma^2(x) \le (k-1)\frac{s_{k-1}(x)}{\chi_u^2} = b^2}$$

Ist p bekannt, so erhöht sich der Freiheitsgrad und man betrachtet jeweils nicht $k-1$ sondern nur k.

5.11 Ermittlung der optimalen Mischzeit

$$\sigma^2(t) = \sigma^2_{syst} + \sigma^2_z(t) + \sigma^2_{mess}$$

Ist die Messungenauigkeit sehr viel kleiner als die zufällige Schwankung, so gilt:

$$\sigma^2(t_m) = \sigma^2_z(t_m)$$

6 Dimensionsanalyse

Vorgehen:

1. Erstellen der Relevanzliste
2. Feststellen der Anzahl der dimensionslosen Parameter Π via $\boxed{\text{Freiheitsgrade} = \text{Parameterzahl - Rang}}$
3. Festlegung von freien und gebundenen Parametern (gebundene: nehme welche mit vielen Nullen in Relevanzliste!)
4. Bestimmung der der freien Paramter als Funktion der gebundenen

$$w = x^a \cdot y^b \cdot z^c$$

5. Umstellen / Umformen zu bekannten dimensionslosen Kennzahlen

7 Packungen

7.1 Allgemeines

$$\boxed{V = V_H + V_P} \qquad \boxed{S\frac{V}{V_H}}$$

$$\rho_H = \frac{m_H}{v_H} = \frac{m_1 + m_2}{V_H} = \frac{V_1 \rho_F}{V_H}$$

$$\boxed{\rho_H = S\,\rho_F + (1-S)\rho_G}$$

$$\boxed{\rho_{sch} = (1-\epsilon)\rho_P + \epsilon\rho_F + \epsilon(1-\epsilon)\rho_G}$$

$$\boxed{\epsilon = \tfrac{V_H}{V} = 1 - \tfrac{V_P}{V} = 1 - \tfrac{m_P}{\rho_P\, V}}$$

7.2 Gitterstrukturen und Porosität

- Wichtige Packungsstrukturen
  - Kubisch-Primitiv $1-\epsilon = 0,523$
  - Kubisch-Raumzentriert $1-\epsilon = 0,68$
  - Kubisch-Flächenzentriert $1-\epsilon = 0,74$
- Schüttungen

$$\rho_{sch} = \frac{V_P\rho_P + V_H\rho_H}{V}$$

$$\rho_{sch} = (1-\epsilon)\rho_P + \epsilon\rho_H$$

- Innere und äußere Porosität

$$\epsilon_{gesamt} = \epsilon_{sch} + \epsilon_P - \epsilon_{sch}\,\epsilon_P = \epsilon_{sch} + (1-\epsilon_{sch})\epsilon_P$$

- Flächenporosität

$$\epsilon_F = \frac{A_h}{A} \qquad \epsilon = \frac{\int_0^L A_H dx}{FL}$$

8 Zerkleinerung

8.1 Allgemeines

1. Festigkeitswerte

   - Partikelfestigkeit
   $$f_B = \frac{F_B}{\frac{\pi}{4}x_v^2}$$
   - Bruchenergie
   $$W_v = \frac{W}{V} \qquad W_m = \frac{W}{M}$$
   - Bruchwahrscheinlichkeit
   $$W_b(\text{Belastung}) = \frac{M_z}{M}$$

2. Ergebniswerte

   - Bruchanteil
   (Nach definierter Belastung. Anteil, der kleiner ist, als kleinste Fraktion des Aufgabegutes)
   $$BA = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{M_z}{M_0}$$
   - Bruchfunktion
   Partikelverteilung von Bruchstücken $B = f(x, x_0, W_m, ...)$
   - Zunahme ΔS_V

Gleichungen von Hertz

$$p_m = 0,6285 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot v_{rel}^{\frac{2}{5}}$$

$$F = 1,2827 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot v_{rel}^{\frac{6}{5}}$$

8.2 Leistung / Arbeit

- Energieausnutzung
$$\boxed{EA = \frac{\Delta S}{W} = \frac{\Delta S_V}{W_V} = \frac{\Delta S_V}{\rho\, W_M}}$$
- Erforderlicher Energieeintrag pro Volumen
$$W_{B,V} = \int_0^{\epsilon_B} \sigma(\epsilon)\, d\epsilon$$
- Ansatz für maschinelle Zerkleinerung von Walker
$$\frac{dW}{dx} = -\frac{const}{x^n} \qquad n = 1$$
- Bond-Gleichung
$$\boxed{W_H = 10 \cdot W_i \left(\frac{1}{\sqrt{x_{80,p}/\mu m}} - \frac{1}{\sqrt{x_{80,f}/\mu m}}\right)}$$

8.3 Prallmühlen

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi x^2} \qquad n = \frac{1-\epsilon}{\frac{\pi}{6}x^3}$$

$$\lambda = \frac{1}{6\sqrt{2}(1-\epsilon)}$$

Spaltbreite s, Bremsweg s_0, Mittlere freie Weglänge λ

1. kaum abbremsen, hauptsächlich Partikel-Partikel Stöße:

$$0,1mm < x \qquad \lambda \approx s \qquad s_0 \gg s$$

2. Partikel-Partikel Stöße überwiegen. Bremweg in Größenordnung von s

$$10\mu m < x < 100\mu m \qquad \lambda < s \qquad s_0 \geq s$$

3. Grenze Abbremsung. Kaum Partikel-Partikel Stöße

$$x < 10\mu m \qquad \lambda \ll s \qquad s_0 < s$$

8.4 Kugelmühle

Kritische Drehzahl

$$n_c = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{2D}}$$

9 Populationsbilanzen

Allgemein:

$$\underbrace{\frac{dF}{dt}}_{\text{Änderung einer Größe mit der Zeit}} = \underbrace{\int_{V(t)} (B-D)\,dV}_{\text{Bilanz im Volumen}} + \underbrace{\int_{A(t)} \vec{j}\,dA}_{\text{Austausch } j \text{ pro Oberfläche}}$$

9.1 Populationsbilanz im ideal durchmischten System

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial n}{\partial t}}_{\text{Akkumulation}} + \underbrace{\nabla(\vec{v}_i \cdot n)}_{\text{Wachstumsgeschwindigkeit}} + \underbrace{\sum_k \frac{\dot{V}_k \cdot n_k}{V}}_{\text{Zu-/Abfluss}} + \underbrace{n\frac{dV}{V \cdot dt}}_{\text{Volumenänderung}} = B - D}$$

9.2 Kristallisator

Vereinfachungen:

- Verdünnte Suspension: $\frac{dV}{dt} = 0$
- keine Agglomeration, Bruch, Abrieb: $B = 0 \quad D = 0$
- Stationärer Betrieb: $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$
- Größenunabhängige Wachstumsrate: $\nabla(\vec{v}_i \cdot n = G\frac{\partial n}{\partial x}$
- Partikelzahl in Zufluss ist null: $n_{in} = 0 \rightsquigarrow n = n_{out}$
- Verweilzeit: $\tau = \frac{V}{\dot{V}_K}$

$$\rightsquigarrow G\frac{dn}{dx} + \frac{n}{\tau} = 0$$

Mit den Zusammenhängen:

- Anzahldichtekonzentration: $n = n_0 \exp\left(-\frac{X}{G\,\tau}\right)$
- Volumenbezogene Partikelgesamtzahl: $\tilde{N}_{ges} = n_0 \cdot G \cdot \tau$
- Keimbildungsrate: $B_0 = n_0 \cdot G$
- Volumenbezogene Gesamtoberfläche: $A_{ges} = 2 \cdot k_A \cdot n_0 (G \cdot \tau)^3$
- Volumenbezogene Gesamtpartikelmasse: $m_{ges} = 6 \cdot k_v \cdot \rho_p \cdot n_0 (G \cdot \tau)^4$

Hierbei:

$$k_A = \frac{A}{x^2} \qquad k_V = \frac{V}{x^3}$$
$$x_{50,3} = 3,67 G\tau \qquad x_{mod,3} = 3G\tau$$

9.3 Isothermer Rohrreaktor

Vereinfachungen:

- Verdünnte Suspension: $\frac{dV}{dt} = 0$
- keine Agglomeration, Bruch, Abrieb: $B = 0 \quad D = 0$
- Stationärer Betrieb: $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$
- Größenunabhängige Wachstumsrate: $\nabla(\vec{v}_i \cdot n = G\frac{\partial n}{\partial x}$
- Konstante Partikelgeschwindigkeit: $u_z = const$
- Bilanzraum: $V = A_{quer}\, dz$
- Volumenstrom: $\dot{V} = u_z \cdot A_{quer}$
- Partikelanzahl an Stelle $z + dz$: $n(z + dz) = n(z) + \frac{\partial n}{\partial z} dr$

$$\rightsquigarrow G\frac{\partial n}{\partial x} - u_z \frac{\partial n}{\partial z} = 0$$

Konzentrationsänderung aufgrund der Massenzunahme der Partikel:

$$\frac{dc}{dz} = -\frac{1}{V}\frac{dm}{dz}$$

9.4 Agglomeration

- Agglomerationsrate
$$B_{i,j} = \beta_{i,j} \cdot \tilde{N}_i \cdot \tilde{N}_j$$
- Kontinuierliche Schreibweise für die Anzahldichtekonzentration
$$\frac{dn(V,t)}{dt} = \frac{1}{2}\int_{V_0}^{V-V_0} \beta_{\tilde{V},V-\tilde{V}} \cdot n(V-\tilde{V},t) n(\tilde{V},t)\, d\tilde{V} - \int_{V_0}^{\infty} \beta_{\tilde{V},V} \cdot n(V,t) n(\tilde{V},t)\, d\tilde{V}$$
- Konstanter Agglomerationskernel β (d.h. unabhängig von Partikelgröße)
$$\frac{d\tilde{N}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\beta \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1} \tilde{N}_i \cdot \tilde{N}_{k-1} - \beta \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{N}_k \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i\right) = \beta\left(\frac{1}{2}\tilde{N}(t)^2 - \tilde{N}(t)^2\right) = -\frac{1}{2}\beta\tilde{N}(t)^2$$
- Analytische Integration hiervon ergibt:
$$\tilde{N}(t) = \frac{\tilde{N}_0}{1 + 0.5\beta\tilde{N}_0 t} = \frac{\tilde{N}_0}{1 + \frac{t}{\tau}} \qquad \text{mit} \quad \tau = \frac{2}{\beta N_0}$$
- Änderung der Partikelgröße mit der Zeit (aus Partikelanzahlkonzentration):
$$x(t) = x_0 \sqrt[3]{\frac{\tilde{N}_0}{\tilde{N}(t)}} = x_0 \sqrt[3]{1 + 0.5\beta\tilde{N}_0 t}$$

9.5 Kollisionskernel

- Brown'sche Molekularbewegung

$$\beta_{Brown} = \frac{1}{W}\frac{2kT}{3\eta}\left(x_i + x_j\right)\left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_j}\right)$$

  Hierbei ist W ein Stabilitätsparameter.

- Laminare Scherströmung

$$\beta_{lam} = \frac{1}{W}\frac{4}{3}\dot{\gamma}\left(\frac{x_i}{2} + \frac{x_j}{2}\right)^3$$

  Hierbei bezeichnet $\dot{\gamma}$ die Scherrate.

- Turbulente Strömung

$$\beta_{turb} = \frac{1}{W}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\sqrt{\frac{\varepsilon\,\rho_f}{\eta}}\left(\frac{x_i}{2} + \frac{x_j}{2}\right)^3$$

  Hierbei bezeichnet ε den massenspezifischen Leistungseintrag

- Sedimentation im Schwerkraftfeld

$$\beta_{Sedimentation} = \frac{1}{W}\pi g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p}\right)\left(\frac{x_i}{2} + \frac{x_j}{2}\right)^2\frac{2\rho_p}{9\eta}\left|\left(\frac{x_i}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_j}{2}\right)^2\right|$$

10 Grenzflächenenergie, Benetzung und Kapillarität

- Arbeit durch Oberflächenenergie

$$dW = \gamma \cdot l\,dx = \gamma\,dA$$

- YOUNG'sche Gleichung

$$\gamma_{l,g} \cdot \cos(\delta) = \gamma_{s,g} - \gamma_{s,l}$$

- LAPLACE Gleichung

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = p_k$$

- KELVIN Gleichung

$$R \cdot T \cdot \ln\frac{p}{p_0} = \gamma V\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

- Kapillardruck

$$\boxed{p_k = \frac{2 \cdot \gamma}{r}\cos(\delta)}$$

- Kapillare Steighöhe

$$\boxed{h_k = \frac{p_k}{\rho_l \cdot g} = \frac{2 \cdot \gamma}{r \cdot \rho_l \cdot g}}$$

- Kapillardruck für Packungen

$$\boxed{p_k = \gamma\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}S_V\cos(\delta)}$$

11 Adhäsion

11.1 Van-Der-Waals Haftkräfte

- System Punkt-Scheibe

$$\boxed{\varphi(a) = -\frac{\pi \cdot \rho \cdot C}{6 \cdot a^3}} \qquad \boxed{H = \frac{d\varphi(a)}{da} = +\frac{\varphi \cdot \rho \cdot C}{2 \cdot a^4}}$$

- Definition der HAMAKER-Konstante

$$\boxed{A = \pi^2 \cdot \rho^2 \cdot C}$$

- Vorgehen zur Bestimmung der Haftkraft beliebiger Geometrien:
  - Setze Integral $\varphi_x = \int_N \varphi_{\text{Molekul,Ebene}}\, dN$
  - Substituiere $dN = \int_V \rho\, dV$
  - Substituiere $dV = \int_L A(z)\, dz$ mit A als charakteristische Fläche in Abhängigkeit der Orthogonal zur Wand stehenden Koordinate z.
  - Zusammenschreiben und geschickte Wahl der Intergrationsgrenzen für z ($0 \rightarrow a{+}L$ oder $0 \rightarrow L$ und überall z durch $z + a$ ersetzen.)
  - Führe Vereinfachungen ein (z.B. $a \ll z$)
  - Mittele Hamaker-Konstanten von Wand und Partikel: $A_{1,2} = \sqrt{A_1 \cdot A_2}$
  - Ableiten der Funktion $\varphi(a)$ nach a: $H = \frac{d\varphi}{da}$
- Definition der LIFSHITZ-Konstante

$$\hbar\varpi = \frac{4}{3}\pi A = \frac{h}{2\pi}$$

- Übersicht von VAN-DER-WAALS Haftkräften nach LIFSCHITZ und HAMAKER für Modellgeometrien:

	LIFSHITZ	HAMAKER
Ebene-Platte $H_{vdW}^{\vert\square}$	$\frac{\hbar\varpi}{8\pi^2 a^3}$	$\frac{A}{6\pi a^3}$
Ebene-Kugel $H_{vdW}^{\vert\circ}$	$\frac{\hbar\varpi R}{8\pi a^2}$	$\frac{A}{6a^3}R$
Kugel-Kugel $H_{vdW}^{\circ\circ}$	$\frac{\hbar\varpi}{8\pi a^2}\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$	$\frac{A}{6a^2}\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$

11.2 Elektrostatische Anziehungskraft

- Elektrische Leiter

$$H_{el}^{\circ\circ} = \pi\varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{U^2}{a}\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Elektrische Nichtleiter Spezialfall: Kugel-Kugel

$$H_{el.NL.}^{\circ\circ} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0(R_1 + R_2 + a)^2}$$

mit $\sigma_i = \frac{q_i}{4\pi R_i^2}$ ergibt sich:

$$H_{el.NL.}^{\circ\circ} = \frac{4\pi}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\sigma_1\sigma_2 \frac{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\right)^2}{\left(1 + \frac{a}{R_1+R_2}\right)^2}$$

11.3 Anziehungskräfte durch Flüssigkeitsbrücken

$$H_{Fl} = H_{\text{Randkraft}} + H_{\text{Kapillarkraft}}$$

$$H_R = U\gamma\cos(\delta) \qquad U \text{ ist der benetzte Durchmesser}$$

$$H_K = p_k \pi R_2^2$$

11.4 Zugfestigkeit von Agglomeraten

$$\boxed{\sigma_z = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{H}{x^2}}$$

12 Strömung durch Festbetten

- EULER-Zahl
$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho_f \bar{v}^2}$$
Für $Re < 1$ und $0,37 < \varepsilon < 0,64$ gilt für Packungen aus etwa gleich großen Kugeln:
$$Eu = \frac{\Delta L}{\bar{x}_{1,2}}\frac{22,4}{Re}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^{4,55}}$$
- Widerstandsgesetz von DARCY ($Re < 1$)
$$\Delta p = \frac{1}{B}\eta\bar{v}\Delta L$$
Hierbei ist die Permeabilität B definiert als
$$B = \frac{x_{1,2}^2}{22,4}\cdot\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^{4,55}}$$
- Hydraulischer Durchmesser
$$d_h = \frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{1}{S_V}$$
- HAGEN-POISEUILLE'sches Widerstandsgesetz
$$\Delta p = 32\frac{\eta}{d^2}v\Delta L$$
- Spezielle REYNOLDS-Zahl
$$\boxed{Re^* = \frac{\rho_f\bar{v}}{\eta(1-\varepsilon)S_V}}$$
- CARMAN-KOZENY-Gleichung (für $Re^* < 1$)
$$\boxed{\Delta p = K\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3}\eta S_V^2\Delta L\bar{v}}$$
- ERGUN-Gleichung (für $1 < Re^* < 1000$)
$$\boxed{\frac{\Delta p}{\Delta L} = \underbrace{4,16\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3}\eta S_V^2\bar{v}}_{\text{Laminarer Anteil}} + \underbrace{0,292\frac{1-\varepsilon)}{\varepsilon^2}\rho_f S_V\bar{v}^2}_{\text{Turbulenter Anteil}}}$$

13 Wirbelschicht

13.1 Zustände am Lockerungspunkt

Hierbei gilt: $K = 150$ und $C = 1,75$.

- Druckverlust in der Wirbelschicht
$$\Delta p_W = (1-\varepsilon)(\rho_p - \rho_f)gh$$
Druckverlust bei v_{mf}
$$\Delta p_{mf} = (1-\varepsilon_{mf})\Delta\rho g\, h_{mf}$$

- ARCHIMEDES-Zahl

$$Ar = \frac{\Delta\rho g x_{1,2}^2}{v^2\rho_f}$$

- REYNOLDS-Zahl (Re_{mf}) am Lockerungspunkt

$$Re_{mf} = \frac{K}{2C}(1-\varepsilon_{mf})\left(\sqrt{1\frac{4C}{K}\frac{\varepsilon_{mf}^3}{(1-\varepsilon_{mf})^2}Ar} - 1\right)$$

Speziell für turbulente Durchströmung einer Wirbelschicht $Re_{mf} > 100$:

$$Re_{mf} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{mf}^3}{C}Ar}$$

- Minimale Anströmgeschwindigkeit (v_{mf})

$$v_{mf} = \frac{K}{2C}(1-\varepsilon_{mf})\frac{v}{x_{1,2}}\left[\sqrt{1+\frac{4C}{K}\frac{\varepsilon_{mf}^3}{(1-\varepsilon_{mf})^2}\frac{\Delta\rho g x_{1,2}^2}{v^2\rho_f}} - 1\right]$$

Speziell für turbulente Durchströmung einer Wirbelschicht $Re_{mf} > 100$:

$$v_{mf} = \sqrt{\frac{1}{C}\frac{\Delta\rho}{\rho_f}g x_{1,2}\varepsilon_{mf}^3}$$

13.2 Ausdehnungverhalten einer Wirbelschicht

- Anzahl der Partikel in einer Schüttung

$$N = \frac{Ah(1-\varepsilon)}{\frac{\pi}{6}M_{3,0}}$$

- Widerstandskraft von Partikeln in einer Wirbelschicht

$$F_W = \frac{1}{2}\rho_f v^2 \frac{\pi}{4} M_{2,0} c_D(Re)c(\varepsilon)$$

13.3 REH-Diagramm

Im REH-Diagramm wird $\frac{1}{c_D}$ gegen die REYNOLDS-Zahl aufgetragen. Zusätzlich sich Ar und Ω-Zahl, sowie die Porosität ε aufgetragen, so dass bei Kenntnis von 2 der Kenngrößen die fehlenden 3 direkt ablesbar sind.

- ARCHIMEDES-Zahl

$$Ar = \frac{gx^3}{\nu^2}\frac{\Delta\rho}{\rho_f}$$

- Ω-Zahl

$$\Omega = \frac{v^3}{g\nu}\frac{\rho_f}{\Delta\rho}$$

14 Schüttgutmechanik

- Silodruckbeiwert

$$\lambda = \frac{\sigma_n}{\sigma}$$

- Druckspannung an der Stelle z

$$\sigma(z) = \frac{\rho_{sch} g D}{4\xi\lambda}\left(1 - \exp\left(-\frac{4\xi\lambda}{D}z\right)\right)$$

- Maximale Druckspannung (für $z \to \infty$)

$$\sigma_{max} = \frac{\rho_{sch} g D}{4\xi\lambda}$$

Hier sollte man noch ergänzen... aber hier wurde in der Vorlesung nur noch durchgehoppelt...